

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кваліфікаційна наукова праця на
правах рукопису

ВЕРБИЦЬКИЙ ЄВГЕН ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 621.314.58

ДИСЕРТАЦІЯ

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ТА СИНТЕЗ ЗАКОНІВ КЕРУВАННЯ
НАПІВПРОВІДНИКОВИМИ ПЕРЕТВОРЮВАЧАМИ У БАЗИСІ РЯДУ ФУР'Є
ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Спеціальність 05.09.12 – напівпровідникові перетворювачі електроенергії

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Є.В. Вербицький

Науковий консультант: Жуйков Валерій Якович, доктор технічних наук, професор

Київ - 2021

АНОТАЦІЯ

Вербицький Є.В. Спектральний аналіз процесів та синтез законів керування напівпровідниковими перетворювачами у базисі ряду Фур'є декількох змінних. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.09.12 «Напівпровідникові перетворювачі електроенергії» (171 – Електроніка). – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2021.

У дисертаційній роботі отримала подальший розвиток теорія спектрального аналізу струмів та напруг перетворювачів в базисі ряду Фур'є декількох змінних та розрахунку інтегральних показників якості електроенергії у згорнутій аналітичній формі. Отримані результати у сукупності є теоретичним узагальненням та новим вирішенням важливої науково-прикладної проблеми підвищення ефективності аналізу та керування напівпровідниковими перетворювачами на основі побудови теорії спектрального аналізу та синтезу законів керування базованих на використанні ряду Фур'є декількох змінних.

У першому розділі проаналізовано умови забезпечення якості електроенергії у системах з напівпровідниковими перетворювачами та основні інтегральні параметри якості, що характеризують рівень електромагнітної сумісності споживачів електричної енергії і мережі. Показано, що через значне збільшення кількості нелінійних імпульсних споживачів однією з основних причин погіршення параметрів якості електроенергії є генерація споживачами інтергармонік струму і напруги, що майже не зменшуються мережевими фільтрами. Проаналізовано існуючі методи визначення інтергармонік та виявлено їх велику обчислювальну складність при розрахунку інтергармонік модульованих струмів і напруг на виході перетворювачів електричної енергії, що зумовлена жорсткою прив'язкою модулюючого сигналу, носійної функції та інтергармонічних збурень між собою і, як результат, необхідність перерахунку параметрів закону модуляції при будь-якій зміні одного з параметрів.

При цьому важливою проблемою є не тільки визначення спектральної характеристики струму або напруги, які формуються перетворювачем у вже працюючій системі, але й синтез законів модуляції та їх аналіз на етапі проектування системи.

Для усунення громіздких розрахунків запропоновано описувати параметри, що впливають на результуючий закон модуляції, у просторі незалежних змінних і отримувати узагальнені спектральні характеристики сумарного сигналу в M -вимірному просторі при довільному співвідношенні значень незалежних змінних. Узагальнені спектральні характеристики дозволяють отримати модель модульованого сигналу, що містить повну інформацію про нього, при будь-якому співвідношенні між періодом модулюючого сигналу, носійної функції та інтергармонічних збурень.

У результаті огляду методів, що базуються на описі сигналів в просторі декількох змінних, як базовий метод обрано ряд Фур'є двох змінних за рахунок його низькою трудомісткості та поставлено задачу на узагальнення цього методу на довільну кількість змінних.

У другому розділі ряд Фур'є узагальнено на M змінних та проаналізовано властивості ряду, необхідні для аналізу спектра модульованих сигналів з інтергармоніками. Визначено умови появи інтергармонік у спектрі та адаптовано формули розрахунку для їх обчислення. Отримано базові розрахункові співвідношення для розповсюджених модифікацій – переднього фронту, заднього фронту та двостороннього ШІМ і АШІМ сигналів I і II роду на основі ряду Фур'є двох змінних та запропоновані співвідношення, що узагальнюють отримані результати на M змінних.

За умови аналізу складніших законів модуляції, наприклад ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою, векторної ШІМ показано значне ускладнення аналітичних виразів спектральних компонент і, як наслідок, доцільність розрахунку спектра у чисельній формі. Для цієї мети адаптовано алгоритм швидкого багатовимірного перетворення Фур'є для задачі розрахунку спектра модульованих сигналів та оцінено його трудомісткість.

У третьому розділі показано, що активний розвиток сучасних систем керування і регулювання параметрів мереж змінного струму вимагає розробки методів формування ШІМ, що дозволяють керувати окремими гармоніками або групами гармонік несинусоїдальних струмів і напруг, що неможливе при безпосередньому використанні перетворень Кларка-Парка, і вимагає використання методів керування у спектральній області на основі ряду Фур'є декількох змінних.

Для вирішення цієї задачі проаналізовано обмеження у використанні ряду Фур'є, які потрібно усунути, а саме: узагальнений ряд Фур'є використовується лише для розрахунку модульованих сигналів, формування яких здійснюється на основі носійної функції з постійною частотою; відсутність методів розрахунку спектра після фільтра; неможливість розрахунку інтегральних параметрів якості електроенергії на основі узагальненого ряду Фур'є.

Для усунення основних обмежень у використанні узагальнених рядів Фур'є розроблено наступні методи та методики: метод розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції; метод розрахунку струмів і напруг на виході фільтра на основі спільного використання рядів Фур'є однієї і декількох змінних; методику розрахунку інтегральних показників якості модульованих струмів і напруг на основі узагальненого ряду Фур'є, що значно розширили можливості багатовимірних рядів Фур'є при використанні їх у системах керування та синтезі перетворювачів електроенергії на основі оцінки якості параметрів електроенергії.

У четвертому розділі проаналізовані засади реалізації ефективного керування інверторами та для їх реалізації запропоновано модифікації існуючих законів модуляції: регулювання кратності модуляції напруги інвертора для забезпечення необхідного значення коефіцієнта гармонік K_L , що дозволяє зменшити обсяг динамічних втрат у перетворювачі та, відповідно, габаритів перетворювача та маси необхідних радіаторів під час його проектування; синтез двополярної модуляції зі зменшеним значенням першої гармоніки з метою зменшення масогабаритних показників трансформатора інвертора. В результаті чого розроблено принцип керування однофазним інвертором за значенням коефіцієнта гармонік, що дозволяє зменшити обсяг математичних операцій мінімум на два порядки при похибці розрахунків не вище 1 %, та забезпечує зменшення на порядок обсягу динамічних втрат завдяки зменшенню значення параметра кратності модуляції при максимальних навантаженнях. Також запропоновано використовувати метод модуляції ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу, описаний в базисі ряду Фур'є двох змінних, що зменшує масогабаритні параметри перетворювача із забезпеченням необхідного значення коефіцієнта гармонік вихідної напруги.

П'ятий розділ містить інформацію про адаптацію узагальненого ряду Фур'є до розрахунку спектра з інтергармоніками. На основі розробленого методу проаналізовано ряд практичних задач, що пов'язані з генерацією інтергармонік.

Спочатку розраховано спектральний склад напруги мережі змінного струму з імпульсним параметричним навантаженням та проаналізовано зменшення складності алгоритму розрахунку у порівнянні з рядом Фур'є однієї змінної. Виявлено, що складність розрахунку спектра на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних прямує до теоретичної межі мінімально можливої складності алгоритму розрахунку спектра $O(N)$, що значно менше ніж у швидкого перетворення Фур'є $O(N \log(N))$. Розрахунок значення окремої гармоніки або групи гармонік має складність $O(N^{1/M})$, що також значно менше ніж у дискретного перетворення Фур'є – $O(N)$.

Після цього проаналізовано принцип утворення інтергармонік на вході трансформатора АС-DC перетворювача з гальванічною розв'язкою внаслідок накладання пульсації випрямленої напруги на модульовану високочастотну напругу та показано, що вплив інтергармонік має суттєвий вплив на підмагнічування трансформатора лише при невеликих кратностях модуляції і може досягати 20 % від вихідної потужності, при цьому підмагнічування трансформатора є меншим при непарному значенні чисельника параметра кратності модуляції.

Виявлено, що на відміну від АС-DC перетворювача, у електроприводі асинхронного двигуна інтергармоніки суттєво спотворюють фазні струми. Для вирішення цієї проблеми розроблено методику усунення інтергармонік напруги на виході трифазного інвертора та запропоновано контролювати параметри якості вхідного струму електропривода, спожитого від мережі, за значенням струму фаз двигуна.

У шостому розділі узагальнений ряд Фур'є використано при проектуванні модульних коректорів коефіцієнта потужності для вибору кількості комірок на основі необхідних значень параметрів якості електроенергії у заданому діапазоні зміни параметрів. Використання узагальненого ряду Фур'є дало можливість отримати аналітичні вирази залежності параметрів якості електроенергії від режимів роботи перетворювача і кількості комірок, що дозволяє усунути

багаторазове моделювання режимів роботи модульних перетворювачів у всьому діапазоні вхідних параметрів.

Порівняно складність розрахунку спектра існуючими методами та показано, що складність розрахунку спектра на основі узагальненого ряду Фур'є прямує до теоретичної межі $O(N)$ і має таку ж швидкодію як вейвлет перетворення, тоді як при розрахунку окремих гармонік та інтегральних показників якості, запропонований метод має найменшу складність $O(N^{1/M})$ і $O(1)$ відповідно.

У роботі вирішена наукова технічна проблема підвищення ефективності інтергармонічного аналізу та керування напівпровідниковими перетворювачами на основі побудови теорії спектрального аналізу та синтезу законів керування базованих на теорії ряду Фур'є декількох змінних.

Уперше розроблено метод розрахунку інтергармонічних складових на основі ряду Фур'є декількох змінних та метод придушення інтергармонічних складових у трифазному інверторі регульованого електропривода, обчислювальна складність якого дозволяє реалізувати його у контурі системи керування, що працює у реальному масштабі часу та дозволяє знизити рівень інтергармонічних спотворень на порядок та вдвічі зменшити коефіцієнт нелінійних інтергармонічних спотворень.

Результати роботи впроваджено: в експериментальному зразку модульного зарядного пристрою в рамках проекту «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People», що виконувався у співпраці з Ризьким технічним університетом, Латвія; для врахування інтергармонік при оцінці параметрів якості електроенергії – у ТОВ «Плодоовоч», Таллінському технічному університеті, Естонія; для створення методик і рекомендацій щодо покращення параметрів якості та ощадливого використання електроенергії громадською організацією «Асоціація науковців України»; в учбовий процес в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» при викладанні дисциплін «Теорія інформації та обробка сигналів», «Пристрої перетворювальної техніки», «Системи електроживлення електронної апаратури».

Ключові слова: узагальнений ряд Фур'є декількох змінних, параметри якості електроенергії, інтергармоніки, перетворювачі електроенергії.

ABSTRACT

Verbytskyi I.V. Spectral analysis of processes and synthesis of semiconductor converters control laws on the basis of a Fourier series of several variables. - Manuscript. The dissertation of doctor of technical sciences on a specialty 05.09.12 "Semiconductor converters of the electric power" (171 - Electronics). - National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2021.

In the dissertation work the theory of spectral analysis of converters currents and voltages in the basis of Fourier series of several variables and calculation of the electric power integral quality parameters in the closed analytical form is further developed. The received results together are the theoretical generalization and the new solution of important scientific and applied problem of increasing the efficiency of analysis and control of semiconductor converters based on the theory of spectral analysis and synthesis of control laws based on the Fourier series of several variables implementation.

In the first chapter the conditions for ensuring the quality of electricity in systems with semiconductor converters and the main integral quality parameters that characterize the level of electromagnetic compatibility of electricity consumers and the power grid are analyzed. It is shown that because of a significant increase of amount of nonlinear pulse consumers, one of the main reasons for the deterioration of electricity quality parameters is the generation by consumers of interharmonic currents and voltages that are almost not suppressed by the power grid filters. The existing methods for determining interharmonics are analyzed and their high computational complexity for calculating interharmonics of modulated currents and voltages at the output of electric energy converters is revealed. That is because of rigid binding of modulating signal, carrier function and interharmonic perturbations and, as result, the necessity to recalculate of modulation law at any change of one of parameters.

An important problem is not only the determination of the spectral characteristics of the current or voltage generated by the converter in an already operating system, but also the synthesis of the laws of modulation and their analysis at the design stage of the system.

To eliminate cumbersome calculations, it is proposed to describe the parameters influencing the resulting modulation law in the space of independent variables and to obtain generalized spectral characteristics of the total signal in M -dimensional space at an arbitrary ratio of independent variables. As a result of the review of methods, the generalized spectral characteristics allow to obtain a model of the modulated signal containing complete information about it, at any ratio between the period of the modulating signal, the carrier function and interharmonic perturbations.

As a result of the review of methods based on the description of signals in the space of several variables, the Fourier series of two variables is chosen as the basic method due to its low complexity and the problem of generalizing this method to any number of variables is set.

In the second chapter, the Fourier series is generalized to M variables and the properties of the series necessary for the analysis of the spectrum of modulated signals with interharmonics are analyzed. The conditions for the appearance of interharmonics in the spectrum are determined and formulas for their calculation are adapted. The basic calculated relations for the common modifications - rising edge, falling edge and symmetrical PWM and APWM signals of I and II kind on the basis of Fourier series of two variables are obtained and the relations generalizing the obtained results on M variables are offered.

For analysis of more complex modulation laws, such as PWM with premodulation by the third harmonic, space vector PWM a significant complication of analytical expressions of spectral components and, as a consequence, the feasibility of calculating the spectrum in numerical form is shown. For this purpose, the algorithm of fast multidimensional Fourier transform was adapted for the problem of calculating the spectrum of modulated signals and its complexity is estimated.

In the third chapter is shown that the active development of modern control systems and regulation of the AC power grid parameters requires the development of methods for forming PWM, of methods to control individual harmonics or groups of harmonics of non-sinusoidal currents and voltages, which is impossible with direct use of Clark-Park transformations and requires use of control methods in the spectral domain based on a Fourier series of several variables.

To solve this problem, the limitations in the use of the Fourier series that need to be eliminated are analyzed, namely: the generalized Fourier series is used only to calculate modulated signals, the formation of which is based on a carrier function with a constant frequency; lack of methods for calculating the spectrum after the filter; the impossibility of calculating integral parameters of electricity quality on the basis of a generalized Fourier series.

To eliminate the main limitations in the use of generalized Fourier series, the following methods and techniques have been developed: the method of calculating the spectrum of modulated signals with variable frequency carrier function; method of calculating currents and voltages at the output of the filter based on the joint use of Fourier series of one and several variables; methods of calculating integrated quality indicators of modulated currents and voltages based on the generalized Fourier series, which significantly expanded the capabilities of multidimensional Fourier series when used in control systems and synthesis of power converters based on quality assessment of electricity parameters.

The fourth chapter analyzes the principles of effective inverter control and for their implementation modifications of existing modulation laws are proposed: regulation of the inverter voltage modulation multiplicity to ensure the required value of the harmonic distortion coefficient K_T , which reduces the dynamic losses in the converter and, accordingly, the dimensions of the converter and radiators weight; synthesis of bipolar modulation with a reduced value of the first harmonic in order to reduce the mass and size of the inverter transformer. As a result, the principle of control of a single-phase inverter by the value of the total harmonic coefficient is developed, which allows to reduce the amount of mathematical operations by at least two orders with a calculation error of not more than 1%, and reduces the amount of dynamic losses by reducing the value of the modulation multiplicity parameter at maximum load, and it is proposed to use the method of PWM modulation with inversion of the polarity of every second pulse, described in the basis of the Fourier series of two variables, which reduces the mass and size parameters of the converter while providing the required value of total harmonic distortion value of the output voltage.

The fifth chapter contains information on the adaptation of the generalized Fourier series to the calculation of the spectrum containing interharmonics. Based on the developed method, a number of practical problems related to the generation of interharmonics are analyzed.

First, the spectral composition of the AC power grid voltage with a pulsed parametric load is calculated and the decrease in the complexity of the calculation algorithm in comparison with the Fourier series of one variable is analyzed. It is found that the complexity of calculating the spectrum based on the generalized Fourier series of several variables goes to the theoretical limit of the minimum possible complexity of the algorithm for calculating the spectrum $O(N)$, which is much less than in FFT $O(N \log(N))$. The calculation of the value of an individual harmonic or group of harmonics has a complexity of $O(N^{1/M})$, which is also much less than that of DFT – $O(N)$.

Then the principle of formation of interharmonics at the input of the transformer AC-DC converter with galvanic isolation because of the superimposition of the ripple of the rectified voltage on the modulated high-frequency voltage and showed that the effect of the interharmonic has a significant impact on the magnetization of the transformer only at small modulation multiplicities and can reach 20% of the output power, while the magnetization of the transformer is smaller at an odd value of the numerator of the modulation multiplicity parameter.

It was found that in contrast to the AC-DC converter, in the electric drive of an asynchronous motor the interharmonics significantly distort the phase currents. To solve this problem, a method of eliminating interharmonic of voltage at the output of a three-phase inverter has been developed and it is proposed to control the quality parameters of the input current of the electric drive consumed from the power grid by the value of the motor phase current.

In the sixth chapter, the generalized Fourier series is used in the design of modular power factor correctors to select the number of cells based on the required values of power quality parameters in a given range of parameter changes. The use of a generalized Fourier series made it possible to obtain analytical expressions of the dependence of electricity quality parameters on the modes of operation of the converter and the number

of cells, which eliminates multiple simulations of modes of operation of modular converters in the entire range of input parameters.

The complexity of the spectrum calculation by existing methods is compared and it is shown that the complexity of the spectrum calculation based on the generalized Fourier series goes to the theoretical limit $O(N)$ and has the same speed as the wavelet transform, while when calculating individual harmonics and integral quality parameters, the proposed method has the least complexity $O(N^{1/M})$ and $O(1)$, respectively.

The scientific and technical problem of increasing the efficiency of interharmonic analysis and control of semiconductor converters on the basis theory of spectral analysis and synthesis of control laws based on the theory of Fourier series of several variables is solved in the dissertation.

For the first time, a method for calculating interharmonic components based on a Fourier series of several variables and a method for suppressing interharmonic components in a three-phase inverter of an regulated electric drive is developed, the computational complexity of which allows realize it in real time control systems and decrease in ten times the level of interharmonics and in two times coefficient of nonlinear interharmonic distortions.

The results of the work were implemented: in an experimental modular charger within the project "Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People", which was carried out in cooperation with Riga Technical University, Latvia; for taken into account interharmonics when assessing the parameters of electricity quality - in TOV "Plodoovoch", Tallinn Technical University, Estonia; to create methods and recommendations for improving the parameters of quality and economical use of electricity by the Association of Scientists of Ukraine; in the educational process at the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" in disciplines "Information Theory and Signal Processing", "Devices of Conversion Technology", "Power Systems for Electronic Equipment".

Keywords: generalized Fourier series of several variables, electricity quality parameters, interharmonics, power converters.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Монографія

1. Вербицький Є.В., Кисельова А. Г., Осипенко К. С. Контекстно-залежне керування автономними системами електроживлення: під загальною редакцією д.т.н. Жуйкова В.Я. – К.: Аверс, 2015. – 187 с. (*Здобувачем розроблені спеціалізовані закони модуляції напівпровідниковими перетворювачами для контекстно-залежного керування джерелами енергії*).

Публікації у фахових виданнях:

2. Е.В. Вербицкий, А.Г. Киселева. Использование контекстных данных при управлении распределенной сетью электропитания. *Технічна електродинаміка* – 2016, № 1, с. 55-59. (*Здобувачем синтезовано закон керування розподіленою мережею із задавальною дією на основі контекстних даних*), (Scopus).

3. Ромашко В.Я., Вербицький Є.В., Киричек Є.І. Аналіз втрат енергії в системі відбору максимальної потужності сонячної батареї. *Технічна електродинаміка* – 2014, № 4, с. 55-57. (*Здобувачем запропоновано принцип керування пристроєм відбирання максимальної потужності*), (Scopus).

4. Zhuikov, V.J., Verbytskyi, I.V., Kyselova, A.G. Reactive power compensation approach with dynamic mode of load current. *Technical Electrodynamics* – 2018, № 4, pp. 47-52. (*Здобувачем запропонована методика компенсація реактивної потужності та алгоритм її реалізації*), (Scopus).

5. Verbytskyi I.V., Zhuikov V.J. Asynchronous motor drive interharmonics calculation based on generalized Fourier series of several variables. *Technical Electrodynamics*, 2020, № 2, pp. 36-42. (*Здобувачем адаптовано використання узагальненого ряду Фур'є декількох змінних для розрахунків рівня інтергармонічних спотворень у перетворювачі електропривода асинхронного двигуна*), (Scopus).

6. Bondarenko, O., Verbytskyi, I., Prokopets, V., Kaloshyn, O., Spitsyn, D., Ryzhakova, T., Kozhushko, Y. Modular Power Supply for Micro Resistance Welding. *Electrical, Control and Communication Engineering*, 12(1), 2017, Pp. 20-26. (*Здобувачем синтезовано закон керування модульним перетворювачем для контактного зварювання*), (Web of Science, іноземне видання).

7. Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D.; Vinnikov, D.; Galkin, I. Modular Battery Charger for Light Electric Vehicles. *Energies*, 2020, 13, 774. (Здобувачем розроблено закон керування та принципову схему модульного перетворювача), (Scopus, іноземне видання).

8. Galkin, I.; Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D. Modular Self-Balancing Battery Charger Concept for Cost-Effective Power-Assist Wheelchairs. *Energies*, 2019, 12, 1526. (Здобувачем розроблено принцип пасивного балансування акумуляторних батаерей), (Scopus, іноземне видання).

9. Жуйков В.Я. Вербицкий Е.В., Осипенко К.С. Формирование синусоидального напряжения разнотипными источниками энергии. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2013, № 8(114), Т.2, с. 104-107. (Здобувачем розроблено закон модуляції для паралельно під'єднаних джерел електроенергії)

10. Вербицкий Є.В., Ромашко В.Я. Особенности поиска точки максимальной мощности солнечной батареи методами холостого хода и короткого замыкания. *Электроника и зв'язок*. – 2013. № 5, с. 13-18. (Здобувачем проаналізована ефективність використання методів холостого ходу і короткого замикання).

11. V.Y. Zhuikov, I.V. Verbytskyi, O.F. Bondarenko Zhuikov V.Y. Особенности компенсации миттєвої реактивной мощности в линейных цепях у перехідному режимі при вмиканні навантаження. *Електроніка та зв'язок* – 2017, № 22 (4), с. 30-37. (Здобувачем запропонований принцип компенсації реактивної потужності у перехідних режимах).

12. Є. В. Вербицкий, К. А. Ходаков. Аналіз параметрів якості електроенергії при встановленні компенсаторів реактивної потужності. *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – 45 (1321). – с. 234-242. (Здобувачем запропонована методика порівняння споживання реактивної потужності побутовими споживачами електроенергії).

13. Є. В. Вербицкий, Р. М. Прибудько, Д. О. Зінченко, М. О. Мацюк. Компенсатор реактивної потужності у перехідних режимах. *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 26

(1302). – Т. 2. – С. 121-125. *(Здобувачем запропонований алгоритм роботи компенсатора реактивної потужності).*

14. Вербицький, Є. В. Швидке перетворення Фур'є модульованих сигналів, представлених рядом Фур'є двох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 16 (1292). – с. 102-106.

15. Д.Р. Ушаков, Е.В. Вербицкий. Анализ методов формирования квазисинусоидальных напряжений с минимизацией коэффициента гармонических искажений. *Збірник "Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України"* - 2016, вип. 43, с. 102-106. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку спектра модульованих сигналів на основі ряду Фур'є двох змінних).*

16. Вербицький Є.В. Особливості розрахунку спектру напруги, модульованої по закону ШІМ I і II на основі подвійного ряду Фур'є. *Електроніка і зв'язок.* – 2015. № 5, с. 36-45.

17. Вербицький Є.В. Визначення кратності ШІМ напруги інвертора за значенням коефіцієнта гармонік на основі подвійного ряду Фур'є. *Електроніка і зв'язок.* – 2015. № 4, с. 21-28.

18. Вербицький Є.В., Гонтарев Д.О., Путілін М.В. Розрахунок інтегральних показників модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є. *Електроніка і зв'язок.* – 2014. № 6, с. 52-57. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку інтегральних показників якості модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є).*

19. Путілін М.В., Вербицький Є.В. Зменшення динамічних втрат у інверторах квазісинусоїдальної напруги за допомогою регулювання кратності модуляції вихідної напруги. *Електроніка і зв'язок.* – 2015. № 3, с. 51-55. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку коефіцієнта гармонік модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є).*

20. Вербицький, Є. В. Спектр напруги ізольованого інвертора з двополярною модуляцією. *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2019. – № 2. – с. 10-16.

21. Вербицький Є.В. Аналіз спектру напруги з двополярною модуляцією. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях. – 2017, № 23 (1245), с. 188-193.

22. Вербицький Є.В. Використання поліномів Чебишева для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2014, № 9 (128), Т.2, с. 161-164.

23. I. V. Verbytskyi. A Disturbed Grid Voltage Interharmonic Analysis with Fourier Series of Several Variables. Microsystems, Electronics and Acoustics, 2020, Vol. 25, № 2, p. 25-32.

24. Verbytskyi, I. V. Input Current Quality Parameters Analysis of Modular AC-DC SEPIC Charger Based on Double Fourier Series. Мікросистеми, Електроніка та Акустика. – 2019, 24(6), p. 29-37.

Патенти на винахід

25. Спосіб формування синусоїдальної напруги на основі перетворювача з амплітудно-широтно-імпульсною модуляцією та пристрій для його реалізації. Патент на винахід № 108127, чинний з 25.03.2015, опубл. 25.03.2015 бюл. № 6, Жуйков В.Я., Вербицький Є.В., Осипенко К.С. *(Здобувачем запропоновано принцип модуляції напруги перетворювачів, що працюють паралельно).*

26. Пристрій компенсації реактивної потужності у перехідних і усталених режимах. Жуйков В.Я., Вербицький Є.В. Патент на винахід № 118584, чинний з 11.02.2019, опубл. 11.02.2019, Бюл.№ 3. *(Здобувачем запропоновано принцип модуляції напруги компенсатора реактивної потужності у перехідних режимах).*

Матеріали конференцій:

27. Context-aware framework for energy management system. A. G. Kyselova; I. V. Verbitskyi; G. D. Kyselov. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, pp. 1-4. *(Здобувачем запропоновано принцип керування автономною системою електроживлення).*

28. Ievgen Verbytskyi; Anna Kyselova; Gennadiy Kyselov. Power grid converter control improvement based on contextual data. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, pp. 599-604. *(Здобувачем*

розроблено закони модуляції перетворювачами, під'єднаних до джерел відновлювальної енергії).

29. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Dmitri Vinnikov. Multicell-type current regulator based on Cuk converter for resistance welding. 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON), Riga, 2017, pp. 1 – 6. *(Здобувачем розроблено закони модуляції перетворювачами комірок модульного регулятора струму).*

30. Verbytskyi Ievgen. Spectrum calculation of frequency pulse modulation voltage using double Fourier series. Conference IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering, Riga, 2015, pp. 1-4.

31. Ievgen Verbytskyi. A double fourier series implementation for modulated signal with the arbitrary modulation. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, pp. 518-521.

32. Verbytskyi Ievgen. Spectrum analysis of a bipolar voltage on basis the double Fourier series. IEEE 36th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, 2016, pp. 296-299.

33. V. Y. Zhuikov; I. V. Verbytskyi. Spectrum analysis of bipolar pulse frequency modulation voltage. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, pp. 1-4. *(Здобувачем розроблено методику розрахунку спектра напруги з двополярною частотно-імпульсною модуляцією).*

34. Ievgen Verbytskyi. Principle of Interharmonic Detection in Transformer of AC-DC Converter Based Double Fourier Series. 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO, 2020.

35. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Elizaveta Liivik. Control features of multicell-type current regulator for resistance welding. 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON), Riga, 2017, pp. 1 – 5. *(Здобувачем розроблено принцип керування модульним перетворювачем).*

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	20
ВСТУП.....	22
РОЗДІЛ 1. СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ.....	29
1.1. Забезпечення якості електроенергії у системах з напівпровідниковими перетворювачами.....	29
1.2. Особливості розрахунку параметрів якості електроенергії.....	33
1.3. Методи визначення гармонічних та інтергармонічних складових	37
1.4. Методи розрахунку спектра модульованих струмів і напруг.....	53
Висновки до розділу 1.....	59
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ ДЛЯ АНАЛІЗУ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ.....	61
2.1. Властивості ряду Фур'є декількох змінних.....	61
2.2. Аналіз спектрів ШІМ сигналів узагальненого ряду Фур'є.....	67
2.3. Неперервна і дискретна форма узагальненого ряду Фур'є.....	84
Висновки до розділу 2.....	86
РОЗДІЛ 3. РОЗШИРЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРА.....	87
3.1. Модульовані сигнали зі змінною частотою носійної функції.....	88
3.1.1. Розрахунок функції перетворення змінної $x_2^* = f(x_2)$ модулюючої функції.....	90
3.1.2. Адаптація ряду Фур'є двох змінних для розрахунку спектра ЧІМ... ..	93
3.1.3. Розрахунок спектра програмно модульованих сигналів.....	95
3.2. Спектр струмів і напруг на виході фільтра.....	100
3.2.1. Спектр напруги на виході фільтра при модуляції першого роду.....	101
3.2.2. Спектр напруги на виході фільтра при модуляції другого роду.....	107
3.3. Інтегральні показники якості модульованих струмів і напруг.....	114
Висновки до розділу 3.....	122
РОЗДІЛ 4. УЗАГАЛЬНЕНИЙ РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ОДНОФАЗНИХ ІНВЕРТОРІВ НАПРУГИ.....	123
4.1. Керування кратністю модуляції однофазного ШІМ інвертора без гальванічної розв'язки.....	125

4.1.1. Виведення аналітичного співвідношення для розрахунку коефіцієнта гармонік.....	126
4.1.2. Оцінка похибки та трудомісткості розрахунку коефіцієнта гармонік.	132
4.1.3. Синтез системи керування кратністю модуляції P за значенням коефіцієнта гармонік.....	135
4.2. Однофазний інвертор з гальванічною розв'язкою із покращеними масогабаритними показниками.....	137
4.2.1. Закон перетворення змінної часу.....	141
4.2.2. Спектр однополярної ЧІМ.....	144
4.2.3. Спектр ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу	146
4.2.4. Аналіз режимів роботи ЧІМ інвертора з гальванічною розв'язкою.	149
Висновки до розділу 4.....	153
РОЗДІЛ 5. ВИЯВЛЕННЯ ІНТЕРГАРМОНІК ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ	
УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є.....	155
5.1. Особливості розрахунку інтергармонічних складових.....	155
5.2. Мережа змінного струму з імпульсним параметричним навантаженням.....	160
5.2.1. Профілі струмів з інтергармоніками імпульсних параметричних навантажень.....	161
5.2.2. Спектральні компоненти збурень напруги мережі.....	163
5.2.3. Аналіз зменшення трудомісткості розрахунків у порівнянні з рядом Фур'є однієї змінної.....	168
5.3. Низькочастотні інтергармоніки в однофазному інверторі з гальванічною розв'язкою.....	169
5.3.1. Модель процесів в АС-DC перетворювачі.....	170
5.3.2. Розрахунок спектра напруги інвертора	172
5.4. Інтергармоніки в перетворювачі частотно-регульованого електропривода асинхронного двигуна.....	177
5.4.1. Модель системи електроживлення електропривода асинхронного двигуна.....	178
5.4.2. Розрахунок спектральних компонент узагальненого ряду Фур'є.....	180
5.4.3. Аналіз впливу інтергармонік на асинхронний двигун.....	182
5.4.4. Аналіз інтергармонічних складових електропривода...	185
5.4.5. Параметри якості струму фаз двигуна з урахуванням інтергармонік	190

5.4.6. Методика усунення інтергармонік напруги на виході трифазного інвертора.....	196
5.4.7. Методика розрахунку вхідного струму електропривода, спожитого від мережі, за струмами фаз двигуна.....	201
Висновки до розділу 5.....	203
РОЗДІЛ 6. СИНТЕЗ СТРУКТУРИ МОДУЛЬНОГО ЗАРЯДНОГО ПРИСТРОЮ НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є.....	205
6.1. Аналіз необхідної кількості комірок модульних перетворювачів за значенням параметрів якості електроенергії.....	205
6.1.1. Огляд топологій коректорів коефіцієнта потужності.....	205
6.1.2. Математична модель процесів у перетворювачі SEPIC.....	209
6.1.3. Розрахунок спектра струму модульних перетворювачів на основі узагальненого ряду Фур'є	211
6.1.4. Розрахунок параметрів якості електроенергії.....	216
6.1.5. Розрахунок режимів заряджання батареї.....	220
6.1.6. Розрахунок усереднених показників параметрів якості струму протягом процесу заряджання.....	223
6.2. Схемна реалізація модульного перетворювача.....	227
6.2.1. Структура та принцип керування перетворювачем.....	227
6.2.2. Експериментальні результати	231
6.3. Аналіз переваг узагальненого ряду Фур'є.....	237
Висновки до розділу 6.....	240
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	242
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	245
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РОБОТИ	271
ДОДАТОК Б. ФОРМУЛИ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРАЛЬНИХ КОМПОНЕНТ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ.....	277
ДОДАТОК В. РОЗРАХУНОК СИЛОВОЇ ЧАСТИНИ БАГАТОКОМІРКОВОГО ЗАРЯДНОГО ПРИСТРОЮ.....	308
ДОДАТОК Г. ПРОМІЖНІ РОЗРАХУНКИ.....	315
ДОДАТОК Д. ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ	326

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АС-АС – перетворювач змінної напруги;
АС-DC – перетворювач змінної в постійну напругу;
ADALINE – метод адаптивного лінійного елемента (англ. adaptive linear element);
DC-АС – перетворювач постійної в змінну напругу;
DC-DC – перетворювач постійної напруги;
ESPRIT – метод визначення параметрів сигналу через інваріант обертання (англ. estimation of signal parameters via rotational invariance technique);
MUSIC – метод множинної сигнальної класифікації (англ. multiple signal classification);
THD – коефіцієнт нелінійних спотворень;
TTHD – коефіцієнт нелінійних інтергармонічних спотворень;
АШІМ – амплітудо-широтно-імпульсна модуляція;
АІМ – амплітудо-імпульсна модуляція;
ВП – вейвлет перетворення;
ГРП – граничний режим протікання;
ДСТУ – державний стандарт України;
ДПФ – дискретне перетворення Фур'є;
ККД – коефіцієнт корисної дії;
ККП – коректор коефіцієнта потужності;
МК – мікроконтролер;
НЧ – низькочастотний;
ПГХ – перетворення Гілберта-Хуанга;
ПН – постійна напруга;
ПРП – переривчастий режим протікання;
ПС – постійний струм;
ФАПЧ – фазове автопідлаштування частоти;
ФІМ – фазо-імпульсна модуляція;
ЧІМ – частотно-імпульсна модуляція;

ШІМ – широтно-імпульсна модуляція;
 ШПФ – швидке перетворення Фур'є;
 B – коефіцієнт підмагнічування трансформатора;
 $C_{(m1)(m2) \dots (mM)}$ – спектральні компоненти узагальненого ряду Фур'є;
 f – частота;
 I, U – діючі значення струму і напруги відповідно;
 I_m, U_m – амплітудні значення струму і напруги відповідно;
 i, u – миттєві значення струму і напруги відповідно;
 k – номер гармоніки;
 L – значення індуктивності;
 M – кількість змінних узагальненого ряду Фур'є;
 m_1, m_2, \dots, m_M – індекси спектральних компонент;
 O – складність алгоритму розрахунку спектра;
 P – кратність модуляції;
 R – значення активного опору;
 T – період;
 t – змінна часу;
 x_1, x_2, \dots, x_M – незалежні змінні узагальненого ряду Фур'є;
 y – функція модульованого сигналу в просторі декількох змінних;
 y_H – носійна функція;
 y_M – модулююча функція;
 $y_{зб}$ – функція збурюючого фактора;
 γ – коефіцієнт заповнення імпульсів;
 τ – стала часу електричного ланцюга;
 ω – кутова частота.

ВСТУП

Актуальність теми. Ефективні технології виробництва, транспортування і перетворення електричної форми енергії зумовлюють значний обсяг її споживання у порівнянні з іншими видами енергії, які виробляє людство.

Постійно зростаючий попит на електричну енергію, з одного боку обумовлює необхідність вдосконалення технологій генерування, розподілення, транспортування і перетворення параметрів електроенергії з метою зменшення втрат, покращення електромагнітної сумісності та параметрів якості електроенергії. З іншого – ускладнює цей процес, через збільшення типів навантажень та посилення вимог щодо параметрів якості електроенергії. Тому подальший розвиток систем перетворення параметрів електричної енергії можливий за умови створення нових топологій перетворювальних систем та методів їх керування, що покращують режими їх роботи.

Основною метою розробки перетворювачів електричної енергії є покращення значень параметрів якості електроенергії та підвищення ефективності їх перетворення, що передбачає вирішення комплексу задач, серед яких доцільно виділити задачі синтезу їх структури та законів керування, що мінімізують втрати та спотворення параметрів електричної енергії. Одним з ключових напрямків теорії керування є використання спеціалізованих та адаптивних законів модуляції, що дозволяють забезпечити необхідні значення параметрів якості електроенергії при мінімальних динамічних втратах на основі інформації про спектральний склад напруг і струмів системи.

Значний внесок у розвиток пристроїв перетворювальної техніки та методів керування зроблено кращими закордонними та вітчизняними науковцями, такими як: В.С. Руденко, І.В. Волков, М.М. Юрченко, О.І. Денисов, Є.І. Сокол, В.М. Михальський, В.М. Тонкаль, В.Я. Жуйков, І.Є. Коротєєв, Ю.С. Ямненко, І.В. Жежеленко, Ю.Л. Саєнко, Д.С. Осіпов, А.І. Солодовнік, Т. Lipo, D. Holmes, F. Vasca та інші.

Як правило, достатньо виділити сумарну складову спотворень струму або напруги і в подальшому використовувати її для покращення значень параметрів якості електроенергії. Однак все частіше виникає необхідність контролювати

значення окремих гармонік або їх груп та враховувати інтергармонічні спотворення напруги мережі, викликані неперіодичними процесами в мережі.

Базові можливості для вирішення цих задач має ряд Фур'є двох змінних, однак через ряд обмежень, серед яких можна виділити: розрахунок спектра модульованих сигналів лише з постійною частотою носійної функції; відсутність методик розрахунку інтегральних показників якості; складність розрахунку спектра сигналу після фільтра інтергармонічних складових, спектральний аналіз в просторі двох змінних не використовують на практиці.

У роботі вирішена науково-прикладна проблема інтергармонічного аналізу процесів і синтезу законів керування імпульсних перетворювачів в базисі рядів Фур'є декількох змінних, що дозволяє забезпечити гнучке та адаптивне керування за значенням заданих інтегральних показників якості та виявляти і враховувати інтергармонічні складові напруг та струмів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження за темою дисертаційної роботи виконувалися на кафедрі електронних пристроїв та систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за темами, які фінансувалися Міністерством освіти і науки України: «Підвищення показників енергоефективності та ресурсозбереження засобами силової електроніки для технології отримання високонадійних зварюваних з'єднань різнорідних матеріалів» (№ ДР 00116U006924, 2016 – 2018 рр.), " Система енергозабезпечення високочастотних вентильно-індукторних двигунів дрона з багатокомірковими перетворювачами і просторово-часовою модуляцією " (№ ДР 0120U102131, 2020 –2021 рр.), в рамках виконання грантової тематики: “Поліпшення характеристик і функціональних можливостей систем діагностування промислового обладнання на базі MEMS-давачів” (договір Ф83/106-2018, 2018 р., замовник Державний фонд фундаментальних досліджень) та на основі ініціативних досліджень «Розробка програмного забезпечення для багатомодуляційних перетворювачів параметрів електроенергії» » (№ ДР 0113U007390, 2013 – 2016 рр.).

При виконанні науково-дослідних робіт автор розробив нові підходи до опису модульованих сигналів на основі рядів Фур'є декількох змінних, та синтезував закони керування на основі значень параметрів якості електроенергії.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є вирішення науково-технічної проблеми підвищення ефективності аналізу та керування напівпровідниковими перетворювачами на основі побудови теорії спектрального аналізу та синтезу законів керування базованих на теорії ряду Фур'є декількох змінних.

Поставлена мета досягається вирішенням таких задач:

1. Розвиток теорії використання рядів Фур'є декількох змінних для опису модульованих сигналів та врахування інтергармонічних спотворень.

2. Розробка методу сумісного використання рядів однієї змінної з багатовимірними рядами зокрема для розрахунку спектра модульованих сигналів після фільтра.

3. Розширення принципу розрахунку спектральних характеристик модульованих сигналів на сигнали зі змінною частотою носійної функції.

4. Розробка метода розрахунку інтегральних показників якості електроенергії у згорнутій аналітичній формі.

5. Застосування розроблених підходів для аналізу ефективності топологій і принципів керування напівпровідниковими перетворювачами електроенергії при вирішенні багатопараметричних задач керування, однією з яких є покращення параметрів якості електроенергії.

Об'єктом дослідження є процес формування та обробки модульованих сигналів у просторі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

Предметом дослідження є методи формування модульованих сигналів у просторі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних та регулювання на їх основі параметрів якості електроенергії.

Методи дослідження мають комплексний характер складаються з теоретичної та експериментальної складових. У теоретичних дослідженнях використано математичні основи теорії електричних кіл для аналізу перехідних і

усталених режимів у перетворювачах електроенергії, методи спектрального аналізу для розрахунку спектру струмів і напруг та їх інтегральних показників якості, закони формування модульованих сигналів та принципи побудови систем керування для забезпечення необхідних режимів роботи перетворювачів. Експериментальні дослідження виконувались на макетних зразках та з використанням комп'ютерних моделей у середовищі MatLab Simulink.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Розроблена теорія розрахунку спектральних складових струмів та напруг перетворювачів та інтегральних показників якості на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних, що дозволяє аналізувати спектр напруг і струмів, що є функціями декількох параметрів у згорнутій аналітичній формі.

2. Вперше запропоновано метод розрахунку інтергармонічних складових на основі рядів Фур'є декількох змінних, що має складність розрахунку спектра порядку $O(N)$ на рівні з найшвидшим алгоритмом на основі вейвлет перетворення, однак на відміну від останнього дозволяє розраховувати значення окремих гармонік зі складністю $O(N^{1/M})$ та параметрів якості електроенергії – $O(1)$, що є набагато швидше існуючих аналогів та дозволяє використовувати розроблений метод у контурах системи керування для покращення параметрів якості електроенергії у реальному масштабі часу.

3. Вперше розроблено метод розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції з використанням штучного перетворення змінної часу, після якого частота носійної функції є постійною, що дозволяє використовувати узагальнений ряд Фур'є декількох змінних.

4. Вперше розроблено метод зменшення інтергармонічних складових у трифазному інверторі регульованого електропривода, що дозволяє знизити їх рівень на порядок та зменшити коефіцієнт нелінійних інтергармонічних спотворень з 4.6 % до 2.9 %.

5. Вперше запропоновано сумісне використання ряду Фур'є однієї змінної і ряду Фур'є декількох змінних для розрахунку спектра з врахуванням фільтруючих

властивостей навантаження, що дозволяє покращити ефективність його розрахунку.

Практичне значення одержаних результатів:

Отримані результати є науковою базою для створення ефективних систем керування напівпровідниковими перетворювачами, що виконують функцію забезпечення необхідних значень параметрів якості електроенергії. Практичне значення результатів:

1. Розроблено та реалізовано методику керування однофазним інвертором напруги з вихідною синусоїдальною напругою, що забезпечує стабільне значення коефіцієнта гармонік при мінімальній кратності модуляції напруги та зменшує динамічні втрати при максимальному навантаженні мінімум на порядок.

2. Розроблено та реалізовано систему керування з вдосконаленим методом частотно-імпульсної модуляції, що забезпечує зменшення габаритів магнітних елементів інвертора до 60 % у порівнянні з типовими методами формування синусоїдальної напруги на основі широтно-імпульсної модуляції.

3. Розроблено алгоритм та програмну реалізацію методики аналізу інтергармонік та їх інтегральний вплив на намагнічування магнітних елементів і погіршення значення параметрів якості електроенергії.

4. Методика, що розроблена для розрахунку кількості комірок модульного перетворювача, використана для проектування та виготовлення зарядного пристрою з коефіцієнтом потужності, що перевищує 0.99, в рамках проекту «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People» (Дослідження і розробка електричних, інформаційних технологій та технологій матеріалів для низькошвидкісних реабілітаційних транспортних засобів для людей з обмеженими можливостями»).

Подані в дисертації результати відображені в публікаціях автора в повному обсязі, впроваджені і використовуються при проектуванні перетворювачів електричної енергії для регулювання параметрів якості електроенергії, теоретичному та експериментальному визначенні можливості появи

інтергармонічних складових у мережах змінного струму при під'єднанні різнотипних навантажень.

Результати роботи знайшли практичне використання та впровадження в таких розробках. Акт впровадження результатів роботи у міжнародний проект «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People ERDF LV 1.1.1.1/16/A/147». Результати роботи використовуються для врахування інтергармонік при оцінці параметрів якості електроенергії – у ТОВ «Плодоовоч» та Таллінському технічному університеті, Естонія; для створення методик і рекомендацій щодо покращення параметрів якості та ощадливого використання електроенергії громадською організацією «Асоціація науковців України». Також результати досліджень викладаються в рамках лекцій та лабораторних робіт навчальних курсів «Теорія інформації та обробка сигналів», «Пристрої перетворювальної техніки», «Системи електроживлення електронної апаратури» при підготовці фахівців за спеціальністю 171 «Електроніка» в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Особистий внесок автора. Дисертаційна робота є узагальненням результатів автора із застосування рядів Фур'є для підвищення ефективності керування напівпровідниковими перетворювачами при забезпеченні необхідних параметрів якості електроенергії та врахуванням інтергармонічних складових. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належать: у роботах [4-10], [31] автором розроблено спеціалізовані способи модуляції перетворювачами електричної енергії, що дозволяють під'єднувати паралельно декілька різнотипних джерел енергії та формувати в навантаженні або системі електроживлення струм із задовільними показниками електричної енергії; в [36, 37], [82-84] – розроблено наукові засади компенсації реактивної потужності у перехідних режимах та оцінено покращення параметрів якості електроенергії від його впровадження; в [103, 104, 226, 235, 236] – запропоновано покращення параметрів якості електроенергії за допомогою модульних перетворювачів з чергуванням фаз та оцінено ефект від їх використання; в [140, 149, 168] – проаналізовано методи

підвищення параметрів якості електроенергії при застосуванні спеціалізованих законів модуляції на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на міжнародних науково-технічних конференціях: Проблеми сучасної електротехніки (2014, 2016, 2018, Київ), «IEEE International Conference on Electronics and Nanotechnology», ELNANO (2016, 2020, Kyiv, Ukraine), «International Conference on Intelligent Energy and Power Systems», IEPS (2014, 2016, Kyiv, Ukraine), «IEEE Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering», UKRCON (2017, Kyiv, Ukraine), IEEE Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering (2015, Riga, Latvia), IEEE Conference Electric Power Networks (EPNet) (2016, Szklarska Poreba, Poland), IEEE International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON) (2017, Riga, Latvia), Міжнародна науково-технічна конференція “Smart-технології в енергетиці та електроніці” (2020, Лазурне, Україна).

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано у 35 наукових працях, у тому числі 1 монографії, 23 статтях у наукових фахових виданнях (з них 3 статті у виданнях іноземних держав, 4 у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, 8 статей без співавторів), 2 патентах на винахід, 9 тезах доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаної літератури із 248 найменувань та 5 додатків. Загальний обсяг роботи становить 330 сторінок, у тому числі 223 сторінки основного тексту, 79 рисунків та 12 таблиць.

РОЗДІЛ 1

СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ

1.1. Забезпечення якості електроенергії у системах з напівпровідниковими перетворювачами

Для комплексного вирішення проблем збільшення кількості різнотипних споживачів, під'єднаних до електричної мережі, та посилення вимог щодо параметрів якості електроенергії в системах електроживлення використовується ряд електротехнічних засобів серед яких доречно виділити компенсатори реактивної потужності, активні фільтри, симетрувальні пристрої, коректори коефіцієнта потужності [1], в системах з відновлювальними джерелами енергії додатково використовуються пристрої відбирання максимальної потужності [2]. Кожен з цих пристроїв покращує низку параметрів електроенергії:

- коефіцієнт потужності;
 - коефіцієнт несиметрії фазних напруг;
 - ступінь стабілізації напруги мережі;
 - рівень узгодження параметрів джерела електроенергії і навантаження,
- і забезпечує стабільний режим роботи системи електроживлення в цілому.

Електротехнічне устаткування мереж побудоване на різнотипному електротехнічному устаткуванні – реактивних елементах, синхронних генераторах, трансформаторах і т.д. [3], що необхідне для підтримання необхідних значень параметрів якості електроенергії. Його ефективна робота у широкому діапазоні робочих режимів можлива за умови використання напівпровідникових перетворювачів електричної енергії, що можуть доповнювати вже встановлене устаткування. Використання напівпровідникових перетворювачів електричної енергії створює додаткові переваги при роботі устаткування, а саме [4,5]:

- гнучкий вибір режим роботи джерела напруги, струму або потужності;
- плавне регулювання значення параметрів роботи пристроїв;
- плавний пуск та вимкнення пристроїв;

- генерування струму необхідної форми;
- забезпечення паралельної роботи декількох різномісних пристроїв.

Вказані переваги дають можливість інтегрувати електротехнічне устаткування у єдину систему та керувати ним синхронно для збільшення ефективності регулювання параметрів якості електроенергії системи електроживлення, що широко використовуються в інтелектуальних системах електроживлення, наприклад в Smart Grid [6-10].

Формування необхідної форми струму і напруги на виході перетворювачів досягається за допомогою використання різних типів модуляції [11, 12], які умовно можна розділити на два класи: неперервна та імпульсна, рис. 1.1, до яких належать такі методи модуляції:

- неперервна – підсилення, внутрішня і зовнішня фільтрація;
- імпульсна: частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ), широтно-імпульсна модуляція (ШІМ), фазо-імпульсна модуляція (ФІМ), амплітудо-імпульсна модуляція (АІМ), амплітудо-широтно-імпульсна модуляція (АШІМ).

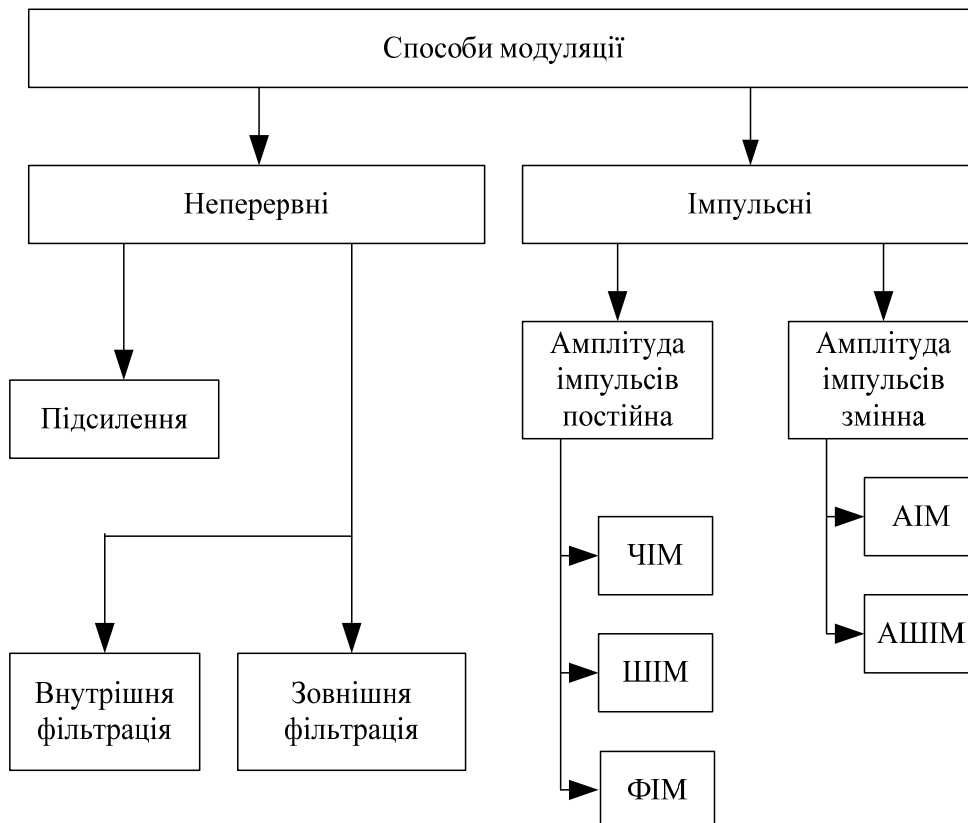


Рис. 1.1. Методи модуляції вихідного параметра

Застосування неперервного підсилення сигналу заданої форми обмежене випадком відносно малих потужностей і малого діапазону регулювання вихідного параметра, оскільки неперервні методи модуляції мають низький коефіцієнт корисної дії (ККД), що обумовлений роботою ключових елементів в активному режимі. Однак, незаперечною перевагою неперервних методів є простота реалізації, низька інерційність та помилка формування сигналу у широкій смузі частот, яка визначається нелінійністю активного елемента.

Імпульсні методи модуляції є більш енергоефективними, оскільки для формування вихідної напруги напівпровідникові прилади перетворювача працюють у ключовому режимі. Необхідна форма вихідних струмів і напруг за умови застосування імпульсних методів модуляції отримується встановленням на виході перетворювачів фільтрів, що в цілому покращує ККД, масогабаритні показники, однак супроводжується рядом негативних факторів, таких як: наявність пульсації вихідної напруги, збільшення інерційності контуру керування, виникнення перехідних режимів, звуження робочого діапазону частот.

Пульсація вихідної напруги та інерційність контуру керування в свою чергу зменшує область стійкості перетворювача, а перехідні режими зумовлюють перевантаження за струмом і напругою.

Вплив негативних факторів на роботу перетворювача можливо мінімізувати, коректно обравши топологію перетворювача, визначивши необхідний тип імпульсної модуляції на основі аналізу можливих режимів його роботи. Топології напівпровідникових перетворювачів доцільно класифікувати за критеріями, наведеними на рис. 1.2 [13, 14].

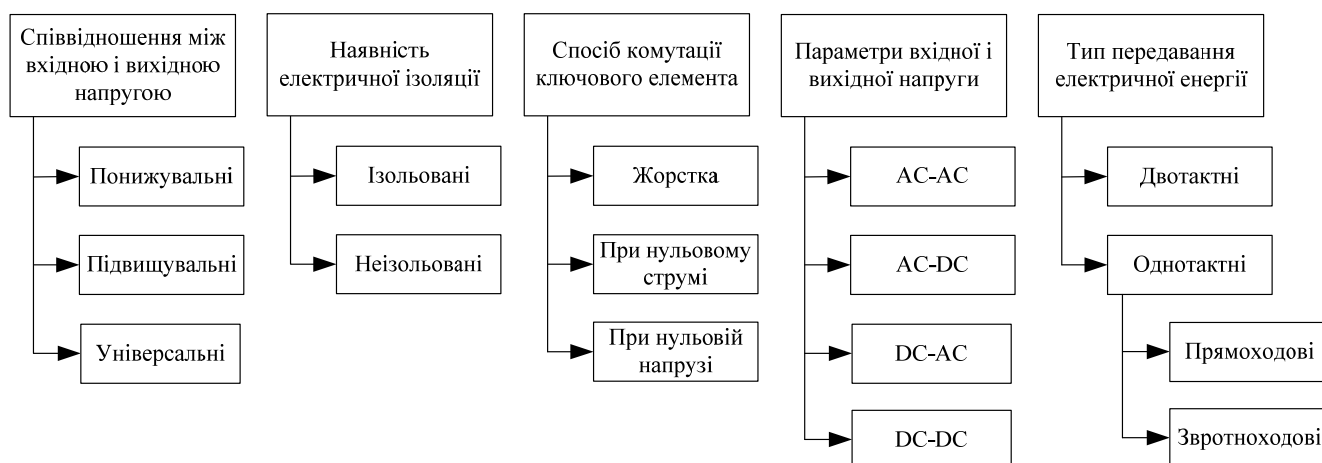


Рис. 1.2. Критерії класифікації напівпровідникових перетворювачів

Наведені критерії використовуються для вибору структури перетворювача. Одні з критеріїв класифікації при виборі структури перетворювача є очевидними і однозначними, наприклад параметри вхідної і вихідної напруги (для перетворення параметрів постійної напруги (DC-DC) використовується обмежена кількість перетворювачів постійної напруги: однокітні – понижувальний, підвищувальний, інвертувальний, двокітні – мостові, напівмостові, з середньою точкою), інші критерії можуть залежати від параметрів перетворювача, як от тип комутації ключових елементів – від його потужності або ККД. Як правило, існує декілька топологій, на основі яких можливо синтезувати перетворювач, вибір однієї з яких ґрунтується на ретельному аналізі їх роботи у заданих режимах.

Як правило, керування перетворювачем, окрім середніх і діючих значень вихідної напруги (струму), додатково може здійснюватись на основі інших параметрів: миттєвого значення вхідного струму, керування яким забезпечує необхідне значення коефіцієнта потужності; миттєвого значення струму ключового елемента, для забезпечення м'якої комутації силових ключів та ін., що передбачає використання засад теорії багатовимірного керування [15], а саме:

- забезпечення стабілізації вихідних параметрів a_1, a_2, \dots, a_n у межах допусків $\delta_{a1}, \delta_{a2}, \dots, \delta_{an}$ [15];
- оптимізація одного параметра, наприклад a_1 , з обмеженням значень інших параметрів у заданих діапазонах $a_2 \in [a_{2\min}; a_{2\max}], \dots, a_n \in [a_{n\min}; a_{n\max}]$ [16];
- максимізація (мінімізація) цільової функції, складеної з суми всіх вихідних параметрів, взятих з певними ваговими коефіцієнтами [17].

У випадку багатовимірних систем закон керування перетворювачем значно ускладнюється. Тому проектування перетворювачів із покращеними показниками енергоефективності і електромагнітної сумісності наразі розвивається за декількома напрямками:

- проектування багатоланкових перетворювачів, де закон модуляції кожної ланки забезпечує формування одного з вихідних параметрів, прикладом яких може слугувати розповсюджена структура імпульсних AC-DC перетворювачів із

вхідною ланкою коректора коефіцієнта потужності на основі підвищувального перетворювача [18, 12];

- використання адаптивних законів модуляції, що забезпечують підвищену енергоефективність роботи перетворювачів, наприклад матричних перетворювачів частоти з корекцією коефіцієнта потужності [19];

- одночасне вдосконалення як структури перетворювачів в результаті додавання до їх структури ланок, що забезпечують м'яку комутацію транзисторів, так і використання спеціальних законів модуляції для регулювання вихідного параметра і комутації ключових елементів при нульовому значенні струму або напруги [14, 20-22];

- пошук або синтез топологій перетворювачів та налаштування їх режимів роботи, що забезпечують формування необхідних значень параметрів якості електроенергії, комутації транзисторів та вихідних параметрів на основі загальноновживаних законів модуляції природним методом [23].

Проектування перетворювачів на основі перелічених напрямків має свої переваги і недоліки, але однією з важливих задач при проектуванні їх силових частини та системи керування є вивчення впливів їх режимів роботи на значення параметрів якості електроенергії, що визначають рівень електромагнітної сумісності перетворювачів та джерел енергії.

1.2. Особливості розрахунку параметрів якості електроенергії

Параметри якості електроенергії характеризують форму струмів і напруг, їх спектральний склад. Їх основний перелік та нормативні значення наведено у стандартах, що їх регламентують [24-26]. Перелік параметрів якості електроенергії, що переважно використовуються на практиці, наведено у табл. 1.1 [24-29]:

Таблиця 1.1. Параметри якості електроенергії

Параметр якості	Формула для розрахунку	Застосування
1. Діюче значення, Y	$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} Y_k^2}, \text{ де}$ $Y_k - \text{діюче значення гармоніки } k$	Електроенергія постійного і змінного струму
2. Середнє значення, Y_d	$Y_d = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt - \text{змінний струм}$ $Y_d = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = Y_0 - \text{постійний струм}$	Електроенергія змінного струму
3. Коефіцієнт форми, K_ϕ	$K_\phi = \frac{Y}{Y_d}$	Електроенергія постійного і змінного струму
4. Коефіцієнт амплітуди, K_{Am}	$K_{Am} = \frac{Y_{\max}}{Y}, \text{ де } Y_{\max} = \max y(t) $	Електроенергія постійного і змінного струму
5. Коефіцієнт несинусоїдальності, K_H	$K_H = \frac{Y_1}{Y}, \text{ де } Y_1 - \text{діюче значення першої гармоніки}$	Електроенергія змінного синусоїдального струму
6. Коефіцієнт нелінійних спотворень, $K_{HC}, (THD)$	$THD = K_{HC} = \frac{\sqrt{Y^2 - Y_1^2}}{Y_1}$	Електроенергія змінного синусоїдального струму
7. Коефіцієнт нелінійних інтергармонічних спотворень, $TIND$	$TIND = \frac{\sqrt{\sum_{k \in \Lambda} Y_k^2}}{Y_1},$ $\Lambda - \text{множина інтергармонік}$	Електроенергія змінного синусоїдального струму

Критерій якості	Формула для розрахунку	Застосування
8. Коефіцієнт гармонік, K_G	$K_G = \frac{\sqrt{Y^2 - Y_1^2}}{Y}$	Електроенергія змінного синусоїдального струму
9. Коефіцієнт відносного вмісту гармонік, K_{Bn}	$K_{Bn} = \frac{Y_n}{Y_1}, \text{ де } Y_n - \text{діюче значення гармоніки } n$	Електроенергія змінного синусоїдального струму
10. Коефіцієнт режекції, K_{Pn}	$K_{Pn} = n^2 \frac{Y_1}{Y_n}$	Електроенергія змінного синусоїдального струму
11. Коефіцієнт квадратичної помилки, δ	$\delta = \sqrt{\int_0^T (y(t) - y_{em}(t))^2 dt}, \text{ де } y_{em} - \text{сигнал еталонної форми}$	Електроенергія постійного і змінного струму
12. Коефіцієнт потужності, χ	$\chi = \frac{P}{S}, \text{ де } P - \text{активна, } S - \text{повна потужності}$	Електроенергія змінного струму
13. Коефіцієнт пульсації по гармоніці n , $K_{\Pi n}$	$K_{\Pi n} = \frac{Y_n}{Y_d}$	Електроенергія постійного струму
14. Нестабільність, δ_H	$\delta_H = \frac{Y_{d\max} - Y_{d\min}}{Y_{dnom}}, \text{ де } Y_{d\max}, Y_{d\min}, Y_{dnom} - \text{максимальне, мінімальне і номінальне середні значення протягом певного часу } T$	Електроенергія постійного струму

Зазначені у табл. 1.1 параметри якості електроенергії можуть бути застосовані як до струму так і до напруги мережі. Найбільш вживаними інтегральними параметрами, що характеризують форму струму і напруги мережі змінного струму, є:

- діюче значення параметра (струму, напруги) Y , п. 1 табл. 1.1;
- коефіцієнт нелінійних спотворень $K_{НС}$ (THD), п. 6 табл. 1.1;
- коефіцієнт гармонік, K_G , п. 8 табл. 1.1,

в цілому електричну потужність змінного струму характеризує коефіцієнт потужності χ , п. 12 табл. 1.1,

Для кола постійного струму, якість електроенергії характеризується інтегральними показниками:

- діюче значення Y , п. 1 табл. 1.1;
- середнє значення Y_d , п. 2 табл. 1.1;
- коефіцієнт форми K_ϕ , , п. 3 табл. 1.1;
- коефіцієнтом пульсації за першою гармонікою, $K_{П1}$, п. 13 табл. 1.1;
- нестабільність δ_H , п. 14 табл. 1.1.

Вимоги щодо параметрів якості електроенергії змінного струму регламентуються державними стандартами, зокрема ДСТУ EN 50160-2014 [24], в яких наведено чисельні значення параметрів якості електроенергії, а також явища що можуть погіршувати параметри якості електроенергії – провали та перевищення значень напруги мережі, флікери, вищі гармоніки та інтергармоніки і т.д.

Через низьку розповсюдженість мереж постійного струму та неповну їх стандартизацію вимоги щодо параметрів якості електроенергії в мережах постійного струму не регламентуються стандартами, однак через те, що енергія в таких мережах в усталеному режимі передається постійною складовою, забезпечення енергоефективного передавання електроенергії спрощується через відсутність циркуляції обмінної енергії між джерелом та навантаженням, яка спричинює появу реактивної потужності [30]. Тому в колі постійного струму достатньо підтримувати необхідну величину середнього Y_d значення контрольованого параметра та його коефіцієнта пульсації $K_{П1}$ або форми K_ϕ , що

досягається вибором відповідної частоти перетворення параметрів електричної енергії та параметрами фільтрів [19, 31].

Процес забезпечення необхідних значень параметрів якості електроенергії у колах змінного струму ускладнюється через:

- наявність реактивної потужності;
- генерування вищих гармонік струму нелінійними навантаженнями, що в свою чергу викликають спотворення форми напруги мережі;
- несиметрію фазних напруг;
- субгармоніки та інтергармоніки струму, які виникають у ланцюгах з різкозмінним навантаженням до яких належать сталеплавильні печі, устаткування для зварювання, перетворювачі частоти, циклоконвертори [32].

Зважаючи на те, що енергія від джерела до навантаження у колах синусоїдального струму передається першою гармонікою, є зручним оцінювати параметри якості електроенергії у частотному спектрі. Тому в переважній більшості стандартів основні обмеження висуваються до амплітуд вищих гармонік та інтергармонік струму і напруги, основною причиною виникнення яких є споживачі з нелінійним та імпульсним навантаженням.

1.3. Методи визначення гармонічних та інтергармонічних складових

Впродовж останніх десятиріч зі зростанням кількості потужних споживачів все більша увага приділяється неперіодичним та некрatним частоті мережі спотворенням струму і напруги, що можуть істотно погіршувати режими роботи електричних машин та трансформаторних підстанцій. Поняття інтергармоніки, як гармонічного коливання не кратного основній частоті живлячої мережі, запроваджено у стандарті EN 50160 у 1994 р [33]. Термін «субгармоніка» є окремим випадком інтергармоніки, коли частота інтергармоніки менша ніж частота напруги мережі. У табл. 1.2 наведено класифікацію гармонік відносно частоти напруги мережі f_1 .

Таблиця 1.2. Класифікація гармонік відносно частоти напруги мережі f_1

Тип гармоніки	Відношення до частоти основної гармоніки f_1
1. Вища гармоніка, k_1	$f_{k1} = k_1 \cdot f_1$, де $k_1 > 1$, k_1 – множина цілих чисел
2. Постійна складова	$f_0 = 0$
3. Інтергармоніка, k_2	$f_{k2} = k_2 \cdot f_1$, де $k_2 > 0$, k_2 – множина дробових чисел
4. Субгармоніка, k_3	$f_{k2} = k_3 \cdot f_1$, де $k_3 \in (0;1)$

Відповідно до стандарту IEC 61000-4-7 [25] значення інтергармонік у напрузі не повинно перевищувати 0.2 % від діючого значення першої гармоніки напруги. При цьому інтергармоніки погіршують значення THD напруги мережі:

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k1=2}^{\infty} Y_{r(k1)}^2 + \sum_{k2=1}^m Y_{i(k2)}^2}}{Y_1}, \quad (1.1)$$

де $Y_{r(k1)}$ – діюче значення k_1 вищої гармоніки, кратної частоті мережі, $Y_{i(k2)}$ – діюче значення k_2 інтергармоніки, m – кількість інтергармонік.

Основними причинами виникнення інтергармонік є [34, 35]:

- модуляція основної гармоніки і вищих гармонік напруги мережі перехідними процесами потужних навантажень під час зміни їх режимів роботи (дугових печей, двигунів зі змінним навантаженням, зварювального обладнання);
- несинхронна комутація ключових елементів напівпровідникових перетворювачів відносно частоти мережі f_1 .

Окрім інтергармонічних спотворень нестационарні процеси породжують неконтрольовані обмінні процеси в системі, що значно ускладнює режими роботи систем електроживлення. Тому окрім проблеми покращення параметрів якості електроенергії наявність нестационарних процесів зумовлює необхідність розробки нових підходів компенсації реактивної потужності [36, 37].

Інтергармоніки є комбінаційними частотами [38], які утворюються внаслідок комбінації коливань як мінімум двох процесів з різними частотами, наприклад для

напівпровідникових перетворювачів з імпульсною модуляцією це частоти першої гармоніки мережі f_1 та носійної частоти f_H модульованого сигналу, додатковими джерелами коливань можуть бути збурення, створювані періодичною зміною режимів роботи навантажень з частотами $f_{зб(i)}$. Частоти комбінаційних гармонік $f_{к(i)}$ утворюються як суми та різниці частот системи [39]:

$$f_{к(i)} = m_1 f_1 \pm m_2 f_H \pm \sum_{k=1}^M m_{k+2} f_{зб(k)}, \quad (1.2)$$

де m_i – комбінаційні індекси, $m_i \in N$.

Якщо носійна частота f_H і частоти збурень $f_{зб(i)}$ кратні частоті мережі f_1 , то всі комбінаційні гармоніки будуть кратними частоті мережі і інтергармонік не виникатиме. Якщо ці частоти не кратні, інтергармоніки будуть виникати. Особливе значення при цьому мають субгармоніки утворені як комбінація різниць частот системи, наприклад $m_1 f_1 - m_2 f_H$, оскільки вони мають частоти менші ніж частота мережі і їх наявність чинить значний негативний вплив на електротехнічне устаткування через те, що мережеві фільтри не розраховані на їх придушення. Період субгармоніки T_{max} з найнижчою частотою розраховується як найбільше спільне кратне Lcm періодів частот системи:

$$T_{max} = Lcm \left(\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_H}, \frac{1}{f_{зб(1)}}, \dots, \frac{1}{f_{зб(M)}} \right). \quad (1.3)$$

Виявлення інтергармонік вимагає аналізу форми сигналу на більшому часовому інтервалі, ніж один період напруги мережі. У стандартах більшості країн світу, наприклад у стандартах ЄС IEC 61000-4-7 [25], EN 50160 та похідним від нього українським стандартом ДСТУ EN 50160:2014 [24] інтервал вимірювання триває 10 періодів живлячої мережі – 0.2 с. Вимірювання інтергармонік на такому інтервалі теоретично дозволяє визначити інтергармоніки, частота яких не менше ніж фундаментальна частота 5 Гц. При цьому через коливання частоти мережі необхідно синхронізувати початок інтервалу вимірювання з фазою частоти мережі, що можна зробити на основі визначення моменту переходу через нуль напруги або використовувати методи інтерполяції [40], що окрім синхронізації дозволяють підвищити роздільну здатність вимірювань при використанні аналогово-цифрових

перетворювачів низької розрядності. У стандарті ІЕС 61000-4-30 [26] для визначення інтергармонік в широкому діапазоні частот вимірювання рекомендується проводити на короткочасному інтервалі часу (до 3 с), короткому (до 10 хв) і тривалому (до 2 год). Однак на практиці розрахунок спектра сигналів з нестационарними складовими стикається зі значними труднощами через [41]:

- невизначеність періоду інтергармонічних спотворень;
- постійну зміну частоти напруги мережі, що призводить до постійної зміни періода інтегрування та накопиченню похибки;
- наведення завад у вимірювальному колі, що передбачає попередню обробку вимірювального сигналу;
- значну обчислювальну складність алгоритмів розрахунку спектра, що спричинює затримку при обробці спектра та створює проблеми в роботі систем керування реального часу;
- невисоку роздільну здатність вимірювання струмів і напруг і як результат недостатню точність розрахунку спектра;
- постійну зміну параметрів навантаження мережі, що призводить до постійних перехідних процесів, появи інтергармонік і, як результат, – необхідності використання інтелектуальних алгоритмів розрахунку спектра;
- появу ефекту «розмивання спектра» при застосуванні дискретного перетворення Фур'є до напруг і струмів, що містять інтергармоніки, який полягає у появі проміжних гармонік та похибці у визначенні гармонік, що дійсно містяться у аналізованому сигналі.

Тому базовий метод розрахунку гармонік – ряд Фур'є та його аналоги для дискретних сигналів – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) або швидке перетворення Фур'є (ШПФ) [42], незважаючи на невелику складність $O(N \log(N))$, де N – кількість відліків сигналу, на практиці рідко використовується безпосередньо. Натомість розроблено ряд його модифікацій, що дозволяють здійснювати синхронізацію з інтервалом вимірювання, фільтрувати завади, інтерполювати виміряні дані, динамічно змінювати інтервал вимірювання.

Для зменшення ефекту «розмивання спектра» у стандартах ІЕС 61000-4-7, ІЕС 61000-4-30 пропонується використовувати процедуру групування гармонік, що знаходяться між сусідніми гармоніками, кратними частоті мережі f_1 .

$$Y_{g,h}^2 = \frac{1}{2} Y_{C,(Nh)-N/2}^2 + \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} Y_{C,(Nh)+k}^2 + \frac{1}{2} Y_{C,(Nh)+N/2}^2, \quad (1.4)$$

де $Y_{C,(Nh)+N/2}$ – діюче значення гармоніки $(Nh)+N/2$, $N = 10$ для частоти мережі 50 Гц, $Y_{g,h}$ – результуюче діюче значення групи гармонік.

Процедура групування дозволяє оцінити значення групи гармонічних та інтергармонічних складових $Y_{g,h}$ порядку h , що відповідає центральним складовим частотних областей, зображених на рис. 1.3, де по осі x наведено номер груп гармонік h , та номер гармонік n .

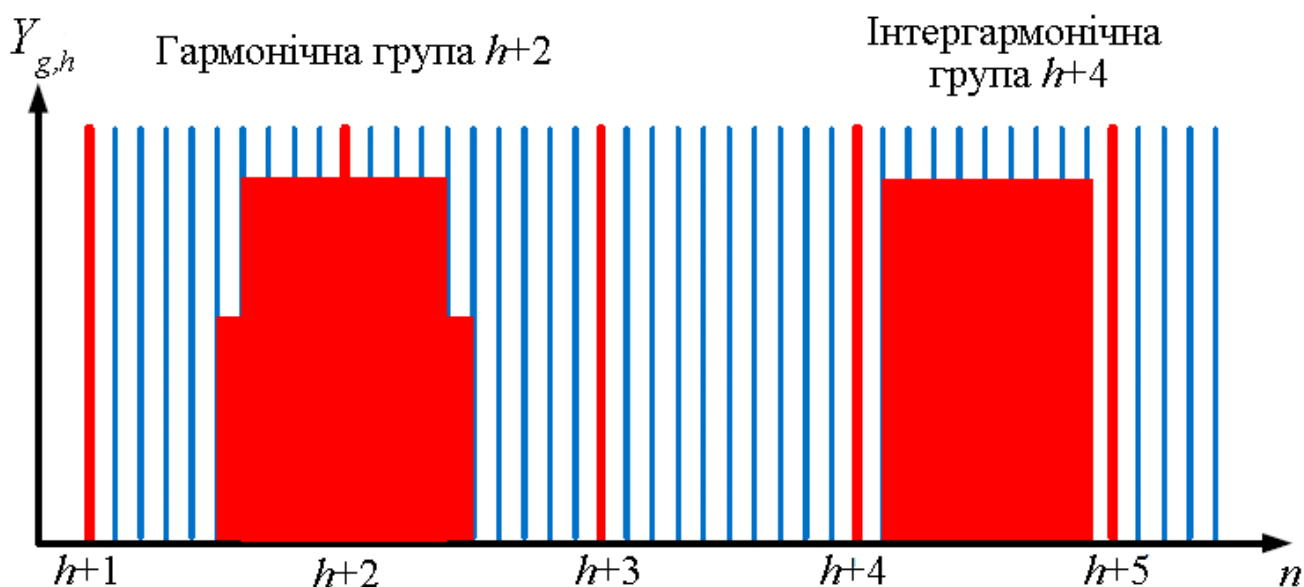


Рис. 1.3. Ілюстрація до принципу групування гармонік

У системах з частими перехідними процесами для підвищення точності вимірювань у стандарті пропонується проводити сумування за трьома сусідніми гармоніками, що утворюють підгрупи з діючим значенням $Y_{sg,h}$, як показано на рис. 1.4:

$$Y_{sg,h}^2 = \sum_{k=-1}^1 Y_{C,(Nh)+k}^2. \quad (1.5)$$

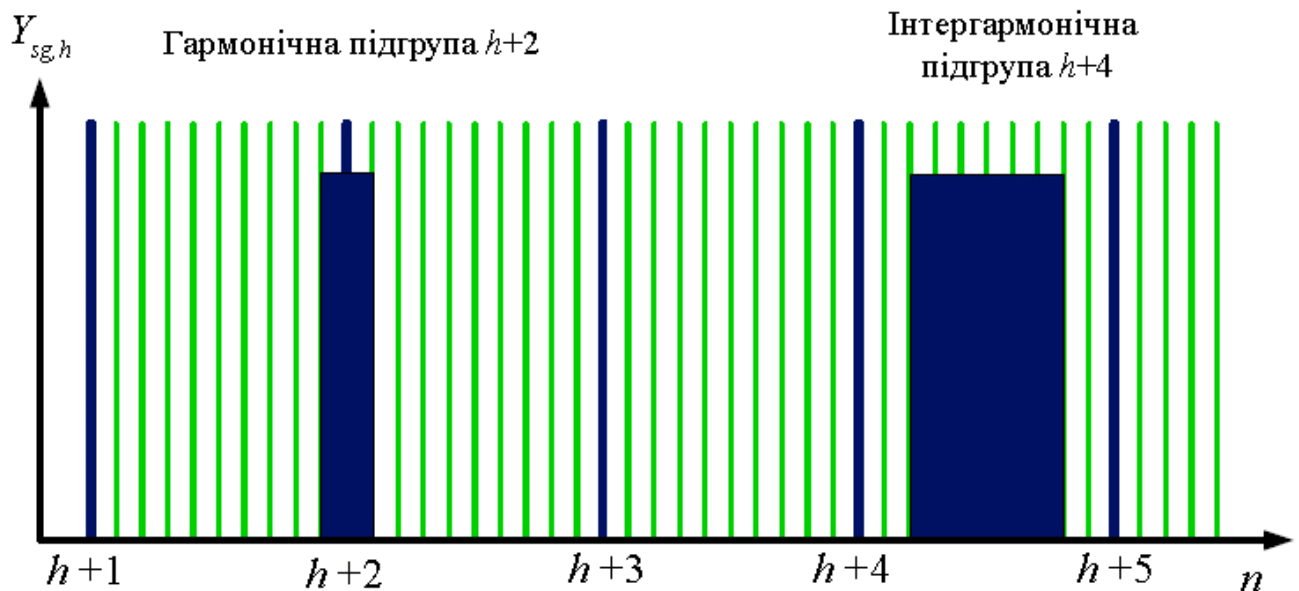


Рис. 1.4. Ілюстрація до принципу утворення підгруп

Процедура групування інтергармонік дає можливість більш точно оцінити гармонічний склад стаціонарного процесу. У випадку дослідження нестационарних процесів через відсутність часової локалізації гармонічних функцій, що утворюють ортогональний базис ряду і перетворення Фур'є, похибка визначення спектральних характеристик додатково збільшується. Тому для вимірюванні спектра струмів і напруг у сучасних мережах з імпульсним різкозмінним навантаженням розроблено ряд методів, що дозволяють значно покращити точність вимірювання гармонік, зменшити ефект розмивання спектра та покращити роздільну здатність при наявності у спектрі інтергармонік. Такі методи можна умовно розділити на:

- непараметричні, на основі яких спектр розраховується безпосередньо на основі параметрів виміряного сигналу, наприклад його значень у відомі часові відліки, у базисі відомих функцій;
- параметричні, що використовують модель сигналу, параметри якої розраховують на основі виміряного сигналу;
- рекурсивні параметричні методи, які дозволяють неперервно змінювати параметри моделі і, тим самим, покращити адаптивність алгоритму та підвищити його стійкість до завад.

Найпростішим непараметричним методом усунення розтікання спектра є покращення локалізації по часу спектральних характеристик сигналів на основі віконного перетворення Фур'є [43]:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) g(k\Delta t - t_0) e^{-jk\Delta t\omega} \Delta t, \quad (1.6)$$

де g – деяка віконна функція, Δt – часовий інтервал між вимірювання.

При більшій ширині вікна досягається гарна частотна роздільна здатність, при вузькому – часова. Одночасної високої роздільної здатності по частоті і часу при використанні віконного перетворення Фур'є досягти неможливо через невизначеність Гейзенберга [44]. Найбільшу популярність отримало віконне перетворення з гаусівським розподілом, так зване S -перетворення, що широко використовується для аналізу параметрів якості електроенергії [45-47]. Цей метод має задовільні результати за умови стабільності частоти напруги мережі та невеликої кількості збурень.

За умови нестабільної частоти мережі, початок інтервалу вимірювання синхронізують з фазою напруги мережі. Якщо частота напруги мережі є відносно стабільною, для розрахунку спектра використовують ШПФ або ДПФ разом найпростішими методами синхронізації, наприклад фіксацією моменту часу переходу напруги мережі через нуль, або визначення моментів часу, коли напруга мережі є максимальною.

Група інших вчених розглядає струм або напругу, що містять інтергармоніки, як випадковий сигнал. Якщо сигнал, у даному випадку струм $i(t)$, містить інтергармоніки, його автокореляційна функція $K_I(\tau)$, розрахована за формулою:

$$K_I(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (i(t) - I_d)(i(t + \tau) - I_d) dt, \quad (1.7)$$

де I_d – середнє значення струму, T – часовий інтервал, на якому визначено струм, є неергодичною [48], тобто з часом не прямує до нуля. Тому незатухаючий «хвіст» автокореляційної функції використовується для розрахунку інтергармонік, зокрема на основі ДПФ [49].

Якщо огиначаючу струму $I(t)$ можливо описати у формі:

$$I(t) = (1 + \xi(t))I_d, \quad (1.8)$$

де $\xi(t)$ – центрований стаціонарний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням,

струм $i(t)$ може бути описаний як добуток огинаючої струму $I(t)$ та розкладу у ряд Фур'є його стаціонарної складової:

$$I(t) = (1 + \xi(t)) \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (1.9)$$

де I_k – амплітуда гармоніки з номером k , ω_1 – кутова частота першої гармоніки, φ_k – фаза гармоніки з номером k .

Тоді автокореляційна функція $K_I(\tau)$ може бути представлена через коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є [50]:

$$K_I(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_l D_k}{2} (\cos((k\omega_1 - \omega_l)\tau) + \cos((k\omega_1 + \omega_l)\tau)) + \\ + (D_0 + 1) \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega_1 \tau), \quad (1.10)$$

де $D_k = I_k^2/2$, $D_l = \frac{2}{T} \int_0^T K_{\xi}(\tau) \cos(\omega_l \tau) d\tau$, $D_0 = \frac{2}{T} \int_0^T K_{\xi}(\tau) d\tau$, $\omega_l = l\omega_0$, $\omega_0 = \pi / T$.

Вираз (1.10) явно містить інтергармонічні складові з частотами $(k\omega_1 - \omega_l)$ і $(k\omega_1 + \omega_l)$ і може бути використаний для їх розрахунку.

Кореляційний аналіз для розрахунку інтергармонік також може бути використаний на основі набору еталонних сигналів, що зміщені один відносно одного у частотній області [51].

Алгоритм розрахунку параметрів гармонік та інтергармонік у цьому випадку є таким:

- формування l еталонних віконних функцій $w_1(t) \dots w_l(t)$ зі спектром $W_1(\omega) \dots W_l(\omega)$ відповідно;
- множення досліджуваного сигналу на еталонну віконну функцію $w_j(t)$ зі спектром $W_j(\omega)$;
- розрахунок ШПФ отриманого сигналу $U(\omega)$;

- знаходження номеру гармоніки з максимальною амплітудою f_{max} , що відповідає першій гармоніці, та формування досліджуваного діапазону спектру $[f_{max}-(l-1)/2; f_{max}+(l-1)/2]$, зазвичай $l = 5$;
- формування еталонних функцій;
- розрахунок кореляційної функції A_v за формулою:

$$A_v = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^l \operatorname{Re}(U_i)W_{ji}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^l \operatorname{Im}(U_i)W_{ji}\right)^2}, \quad (1.11)$$

для кожного еталону і вибір того, який має найбільше значення кореляційної функції A_v ;

- визначення частоти і фази інтергармоніки за обраним еталоном.

При значній нестабільності частоти та спотворенні форми аналіз проводять на основі методів фазового автопідлаштування частоти (ФАПЧ) та chirp-z-перетворення.

При використанні ФАПЧ синхронізація сигналів досягається порівнянням різниці фаз між напругою мережі та опорним сигналом генератора [52, 53].

Chirp-z-перетворення – це узагальнення ДПФ [54], що дозволяє отримувати z-перетворення на довільному контурі $z_k = AW^k$, і як результат – гладкіші та точніші частотні характеристики сигналу, ніж при використанні ДПФ:

$$A = A_0 e^{j2\pi\psi_0}; W = W_0 e^{j2\pi\phi_0}, \quad (1.12)$$

де A_0, W_0, ψ_0, ϕ_0 – дійсні числа.

Chirp-z-перетворення збігається з ДПФ за умови $A = 1, W = e^{-j2\pi/N}$, де N – розмір масиву даних.

Порівняння описаних методів синхронізації [55] засвідчило більшу стабільність chirp-z-перетворення за умови великої кількості збурень, але в цілому метод має меншу точність.

В останні десятиліття для забезпечення високої роздільної здатності у частотному і часовому просторі при розрахунку спектра нестационарних сигналів почали широко використовувати непараметричні методи на основі негармонічного базису функцій – вейвлет перетворення (ВП) [56-58] та перетворення Гілберта-

Хуанга (ПГХ) [59], що мають порівняну або меншу за ШПФ складність. Зокрема існуючі алгоритми швидкого ВП мають складність $O(N)$, а ПГХ – $O(M\log(N))$.

Декомпозиція сигналу на основі ВП здійснюється вейвлетами із заданою роздільною здатністю в частотній і часовій області. Коефіцієнти ВП розраховуються на основі порівняння вейвлетів з сигналом протягом визначеного періоду часу. Для дискретного сигналу $x(n)$ коефіцієнти $X_{ВП}$ ВП визначаються як:

$$X_{ВП}(m, k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{1}{\sqrt{s_{do}^{m-1}}} \psi^* \left(\frac{n - k u_o s_{do}^{m-1}}{s_{do}^{m-1}} \right), \quad (1.13)$$

де k – індекс коефіцієнта ВП рівня m .

ВП зазвичай використовується разом з парами низькочастотних та високочастотних цифрових фільтрів з $s_{do} = 2$ та $u_o = 1$. На основі кожної пари фільтрів з поступовим зменшенням роздільної здатності на кожному рівні m розраховуються деталізовані та наближені коефіцієнти. Набір цих коефіцієнтів є базисом ВП. Як результат ВП забезпечує високу роздільну здатність у часі на високих частотах і високу роздільну здатність по частоті на низьких частотах. Подальшим розвитком ВП є пакетне вейвлет перетворення, що дозволяє додатково підвищити роздільну здатність сигналу в часовій і частотній області [60].

Зокрема в [61] пропонується такий алгоритм розрахунку інтергармонік на основі пакетного ВП:

- застосування пакетного ВП до струму з частотною декомпозицією струму. При цьому кожному пакету коефіцієнтів ВП повинен відповідати інтервал частот, що відповідає певній частотній групі;
- для кожного частотного інтервалу розраховується енергія коефіцієнтів вейвлет перетворення, якщо значення енергії менше заданого рівня, то ця група енергії не враховується при подальшому аналізі;
- для аналізованої групи коефіцієнтів виконується зворотне ВП та відновлюється значення струму, що відповідає заданому частотному діапазону;
- коригування частотних діапазонів знаходження інтергармонік методом Уелча [62];

- частотна декомпозиція сигналу та визначення амплітуд гармонік та інтергармонік та їх частот.

ПГХ – це відносно нова методика двоступеневого аналізу даних, яка використовує концепцію миттєвої частоти. ПГХ розкладає дані на емпіричні моди. Емпіричні моди є адаптивними базисними функціями, на відміну від інших добре відомих перетворень, таких як ДПФ і ВП, де базові функції є наперед відомими. Сигнал $x(t)$ описується через емпіричні моди ГХП c_n та залишковий член r_N наступним чином:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n + r_N. \quad (1.14)$$

На другому кроці до розрахованих емпіричних функцій c_n застосовується перетворення Гілберта [63]:

$$H(c_n(t)) = \frac{1}{\pi} K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(t')}{t - t'} dt', \quad (1.15)$$

де $H(*)$ – операція перетворення Гілберта, K – головне значення інтегралу Коші [64].

Сума емпіричних функцій c_n та їхні перетворення $H(c_n)$ утворюють комплексну функцію:

$$z(t) = c_n(t) + jH(c_n(t)) = a(t)e^{j\theta t}, \quad (1.16)$$

де $a(t)$ – амплітуда, $\theta(t)$ – фаза сигналу у заданий момент часу t .

Однак через негармонічну природу базисних функцій ВП та ПГХ виникають складнощі при точній оцінці спектра сигналів в частотній області та розрахунку параметрів якості електроенергії.

Роздільна здатність за частотою є поширеною проблемою майже у всіх непараметричних методах. Тому виявлення гармонік та інтергармонік цими методами має посередню ефективність у режимах з великою кількістю збурень. У нестационарних режимах з великим рівнем завад більш ефективними є стохастичні моделі, побудовані на основі параметричних методів. Серед параметричних методів використовуються: метод Проні [65, 66], метод множинної сигнальної класифікації (англ. multiple signal classification, MUSIC) [67], метод визначення

параметрів сигналу через інваріант обертання (англ. estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT) [68, 69], метод авторегресії – ковзного середнього [70].

Метод Проні описує сигнал, представлений часовим рядом $y(m\Delta t)$, набором експонент та гармонічних функцій:

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_k e^{\pm j\varphi_k} e^{\lambda_k n\Delta t}, \quad (1.17)$$

де A_k – амплітуда компоненти k моделі, φ_k – фаза компоненти k , λ_k – декремент затухання компоненти k .

Z-зображення різницевого рівняння (1.17) є таким:

$$y(z) = \prod_{h=1}^K (z - z_h). \quad (1.18)$$

Для отримання коефіцієнтів z_h , що описують частотні властивості сигналу, можуть використовуватися різні підходи, такі як автокореляція, коваріація, авторегресія та сингулярний розклад [71-74]. Після цього амплітуда та фаза кожної складової сигналу визначається на основі матриці Вандермонта.

Метод множинної сигнальної класифікації – це параметричний метод, який використовує гармонічну модель з додаванням білого шуму:

$$x(n) = \sum_{k=1}^K a_k \cos(2\pi n f_k + \varphi_k) + w(n), \quad (1.19)$$

де a_k, φ_k, f_k – амплітуда, початкова фаза і частота складових відповідно, $w(n)$ – білий шум.

На основі отриманих даних формується коваріаційна матриця розмірності $M \times M$, де M – розмірність підпростору вибірки даних $x(n)$, що розкладається на два ортогональні підпростори – шуму та сигналу. Підпростір шуму використовується для визначення псевдоспектра:

$$PX_{MU}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{i=K+1}^N |r_H v_i|^2}, \quad (1.20)$$

де r_H – спряжений транспонований власний вектор сигналу, v_i – власний вектор підпростору шуму,

піки якого відповідають домінуючим гармонікам. Амплітуди і фази гармонік знаходяться шляхом розв'язку системи з K рівнянь.

Метод визначення параметрів сигналу через інваріант обертання, як і метод множинної сигнальної класифікації, використовує гармонічну модель (1.19) і розкладає коваріаційну матрицю на підпростір шуму та підпростір сигналу. Однак він оцінює частоти на основі підпростору сигналу. Алгоритм розрахунку амплітуди і фази гармонік складається з таких кроків:

- формування коваріаційної матриці R_x з відліків сигналу $x(n)$;
- розклад коваріаційної матриці R_x на матриці підпростору сигналу R_{xs} та матрицю підпростору шуму R_{xm} ;
- розрахунок субматриць R_1 і R_2 з матриці підпростору сигналу R_{xs} на основі матриць селекторів S_1 і S_2 :

$$S_1 = \begin{pmatrix} E_{N_s} & 0_{d_s} \end{pmatrix}; \quad (1.21)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0_{d_s} & E_{N_s} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

де E_{N_s} – одинична матриця розмірності $N_s \times N_s$, $N_s = M - d_s$, d_s – відстань між підматрицями, зазвичай $d_s = 1$. Тобто $R_i = S_i \cdot R_{xs}$, де $i = 1, 2$.

- розрахунок матриці обертання ψ , що пов'язує матриці S_1 і S_2 :

$$S_1 = \psi S_2. \quad (1.23)$$

- визначення набору частот із діагональних елементів обертової матриці ψ та застосування методу найменших квадратів дає змогу визначати амплітуди та фази гармонік та інтергармонік сигналу.

Модель авторегресії – ковзного середнього базується на моделі, в якій сигнал $x(n)$ розглядається як система з передавальною характеристикою $H(z)$, на вхід якої подається білий шум $w(n)$:

$$H(z) = \frac{x(z)}{w(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}, \quad (1.24)$$

де P – кількість полюсів, Q – кількість нулів. Параметри a_i і b_i моделі розраховуються з використанням часових відліків аналізованого сигналу, після чого визначається спектральні властивості компонент сигналу $M(e^{j\omega})$:

$$M(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| = \frac{x(z)}{w(z)} = \left| \frac{\sum_{i=0}^Q b_i e^{-j\omega} i}{1 + \sum_{i=0}^P a_i e^{-j\omega} i} \right|. \quad (1.25)$$

Загалом, використання параметричних методів дає можливість точніше ідентифікувати момент та форму збурюючих сигналів і підвищити стабільність визначення гармонічних та інтергармонічних складових у мережах з великою кількістю збурень. Однак параметричні методи налаштовуються лише на певний тип збурень, тому показують низьку ефективність за умови появи нетипових режимів роботи. Через це в [75] перед використанням моделі запропоновано тестувати її ефективність на типових режимах роботи мережі перед практичним використанням.

В останні кілька десятиліть ведуться розробки рекурсивних адаптивних методів. Вони є вдосконаленням існуючих і дають змогу ефективніше підлаштовувати параметри математичної моделі під динамічні процеси, зменшувати похибку, зумовлену шумом, та гнучко враховувати нелінійну поведінку реальних процесів у моделі. Найвідомішими методами для розрахунку гармонічних та інтергармонічних складових є: фільтрація Калмана [76, 77], нейронні мережі [78, 79], метод адаптивного лінійного елемента (англ. adaptive linear element, ADALINE) [80, 81].

Фільтр Калмана – це математична модель, що ефективно оперує із зашумленими даними, та рекурсивно формує попередні, поточні чи прогнозні дані з мінімізацією середньоквадратичної помилки. Математична модель складається з рівняння стану:

$$x_{n+1} = x_n \Phi_n + w_n, \quad (1.26)$$

де x_n – вектор змінних стану, Φ – матриця переходу, w_n – помилка моделі, та рівняння вимірювання:

$$z_n = x_n H_n + v_n, \quad (1.27)$$

де z_n – виміряне значення сигналу, H_n – матриця вимірювання, v_n – помилка вимірювання.

На початку роботи фільтра Калмана задається початкова оцінка вектора змінних стану x_0 . На основі цього значення визначається початкова помилка, а потім здійснюється корекція вектора на основі помилки прогнозування. Рекурсивне рівняння для корекції змінних стану є таким:

$$x_n = x_{n0} + K_n(z_n - H_n x_{n0}), \quad (1.28)$$

де K_n – коефіцієнт підсилення Калмана.

Нейронна мережа є одним із підходів, розроблених для апроксимації функціональної залежності між вхідними і вихідними даними. Загалом, виявлення кожної гармонічної складової сигналу може розглядатися як нелінійна задача, яку можна визначити як:

$$a_m = P_m(x(1), x(2), \dots, x(n)); \quad (1.29)$$

$$\varphi_m = Q_m(x(1), x(2), \dots, x(n)), \quad (1.30)$$

де P_m і Q_m – нелінійні функції амплітуди і фази гармоніки m , аргументами яких є виміряні значення сигналу $x(n)$.

Дані функціональні залежності отримуються шляхом тренування нейронної мережі на великій кількості тестових прикладів.

Спрощеним варіантом нейронної мережі є метод адаптивного лінійного елемента, який має всього один шар і лінійну функцію передачі, що дозволяє зменшити час навчання мережі та обсяг навчальної вибірки.

Кожний з розглянутих методів розрахунку гармонік та інтергармонік має свої переваги та недоліки, ефективність кожного з них залежить від спектрального складу сигналу, рівня завад, стаціонарності / нестаціонарності сигналу, частоти вимірювань та розрядності аналогово-цифрового перетворювача. Класифікація проаналізованих методів показана на рис. 1.5.

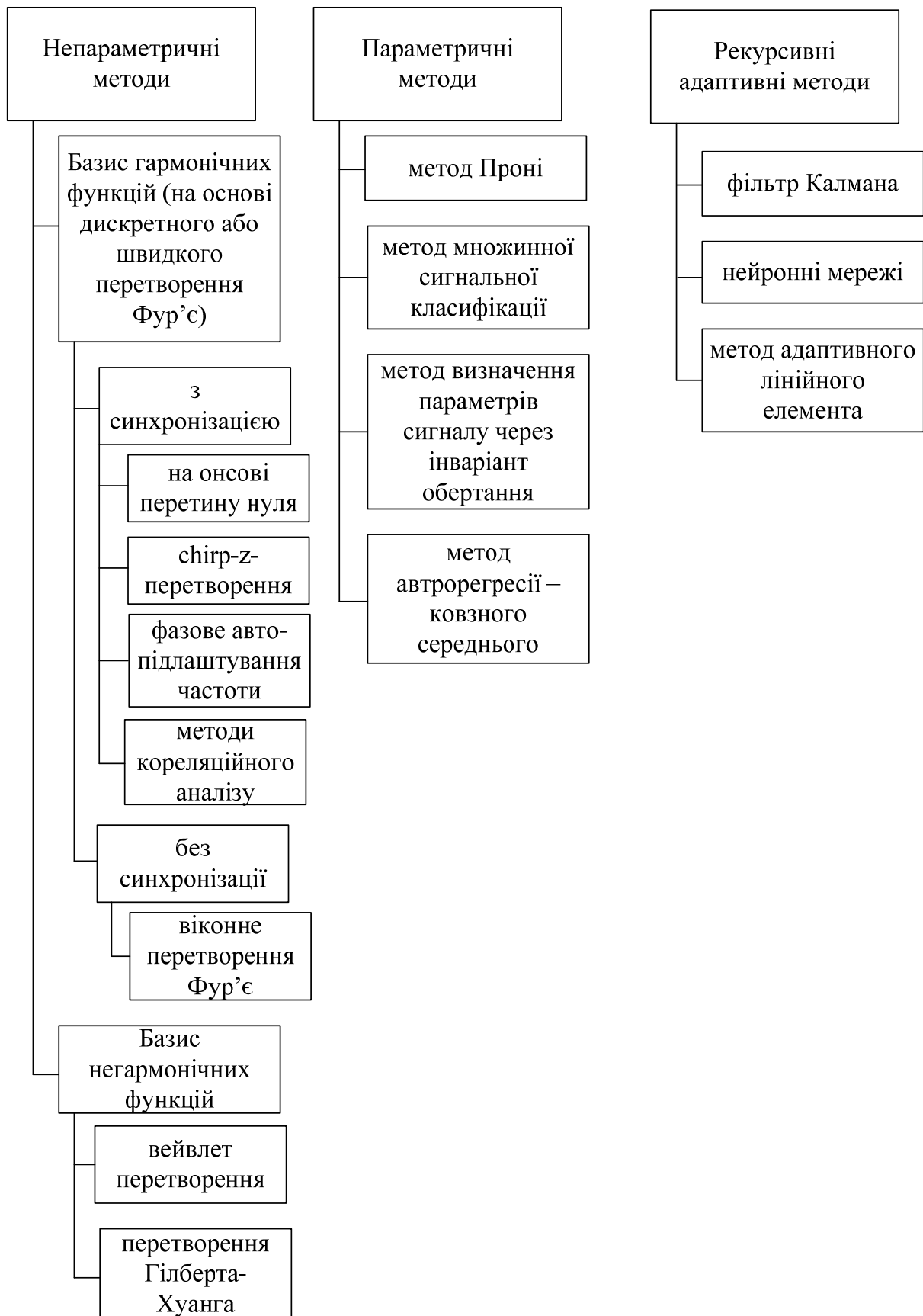


Рис. 1.5. Класифікація методів розрахунку гармонічних та інтергармонічних складових

Методи, що базуються на БПФ і ДПФ доцільно використовувати у випадку низького рівня завад та відносно стабільної частоти мережі, за умови наявності інтергармонік такі методи призводять до ефекту «розмивання спектра» та низької роздільної здатності, що залежить від інтервалу вимірювання сигналу. Непараметричні методи з негармонічним базисом функцій мають кращу роздільну здатність, але через велику трудомісткість і складність розрахунку параметрів якості електроенергії використовуються рідше. Параметричні методи мають кращу стабільність та роздільну здатність, тому використовуються при значних спотвореннях сигналу, а рекурсивні динамічні методи – за умови неперіодичних збурень на фоні завад.

1.4. Методи розрахунку спектра модульованих струмів і напруг

За умови широкого впровадження нових стандартів регулювання параметрів електричної енергії, що передбачають використання напівпровідникових перетворювачів електроенергії як вихідних каскадів електротехнічного устаткування систем електроживлення, швидка та точна оцінка нестационарних складових струму і напруги мережі стає ще більш нагальною, оскільки дає можливість компенсувати їх за допомогою формування необхідних законів модуляції компенсаторів реактивної потужності та активних фільтрів [82-84]. При цьому важливою проблемою є не тільки визначення спектральної характеристики струму або напруги, які формуються перетворювачем у вже працюючій системі, але й синтез законів модуляції та їх аналіз на етапі проектування системи. Тому у цьому випадку оцінки параметрів якості електроенергії доцільно проводити аналітичними методами, що дає ширші можливості для аналізу і вибору законів модуляції.

Формування модульованих сигналів напівпровідниковими перетворювачами здійснюється на основі порівняння значення високочастотної носійної функції $u_H(t)$, що може мати різноманітну форму, але переважно пилкоподібну, і модулюючої опорної функції $u_M(t)$, що повторює форму низькочастотного сигналу, рис. 1.6, а, який необхідно сформувати. Якщо значення модулюючої функції

перевищує значення носійної, на виході формується високий рівень сигналу, інакше – низький рівень, рис. 1.6, б [85].

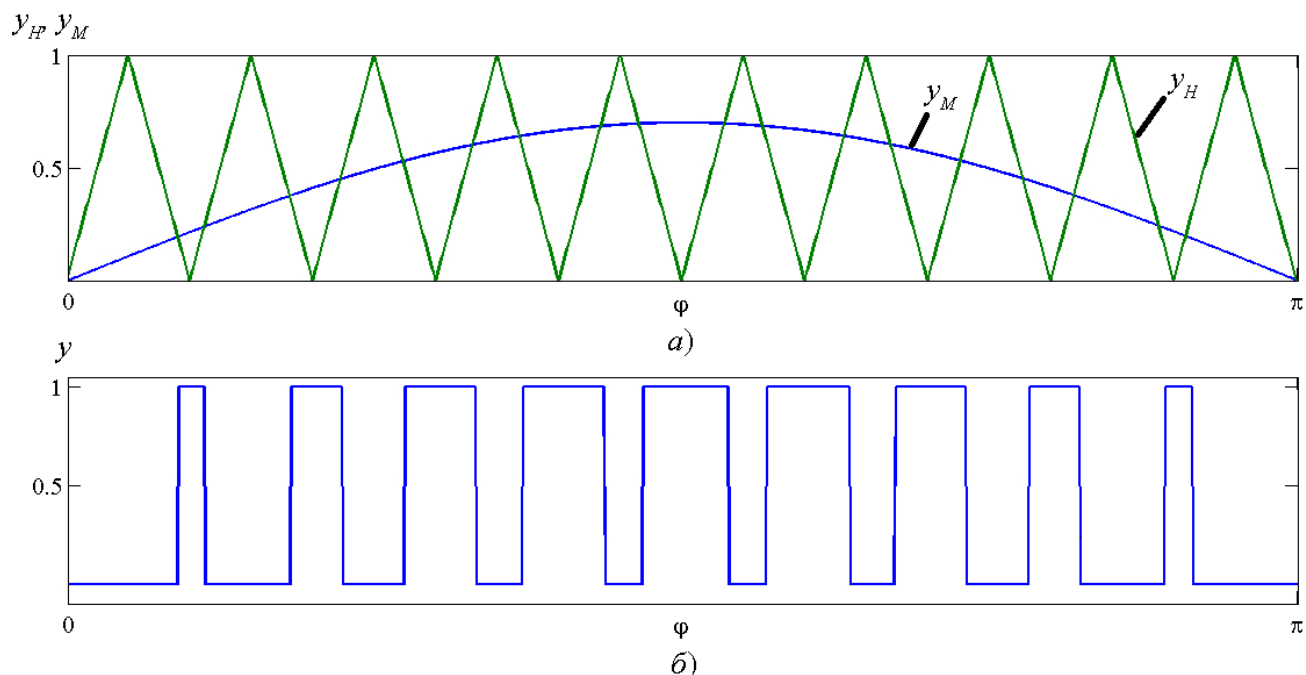


Рис. 1.6. Ілюстрація до принципу формування модульованих сигналів: а) порівняння модулюючого і носійного сигналів; б) модульований сигнал

Формування закону модуляції і накладання на цей закон збурень та інтергармонік в просторі однієї незалежної змінної, у даному випадку – змінної часу t , призводить до громіздких розрахунків спектра, що пояснюється зміною ширини імпульсу модульованого сигналу $y(\phi)$ на кожному наступному періоді носійної функції:

$$C_k = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^P \int_{\phi_{r(i)}}^{\phi_{f(i)}} y(\phi) e^{jk\phi} d\phi, \quad (1.31)$$

де $\phi_{r(i)}$ і $\phi_{f(i)}$ – координати переднього і заднього фронту імпульсу i модульованого сигналу відповідно.

Внаслідок цього подальший аналіз значень параметрів модуляції ускладнюється через жорстку прив'язку модулюючого сигналу $y_M(t)$, носійної функції $y_H(t)$ та інтергармонічних збурень $y_{i(1)}(t) \dots y_{i(N)}(t)$ між собою, що зумовлює необхідність перерахунку параметрів закону модуляції при будь-якій зміні одного з параметрів. Для усунення громіздких перерахунків доцільно перелічені

параметри, що впливають на результуючий закон модуляції, описувати у просторі незалежних змінних $x_1..x_M$, які пропорційні змінній часу t , $x_i = \omega_i t$, і отримувати узагальнені спектральні характеристики сумарного сигналу в M -вимірному просторі при довільному співвідношенні значень незалежних змінних $x_1..x_M$. Узагальнені спектральні характеристики дозволяють отримати модель модульованого сигналу, що містить повну інформацію про нього, при будь-якому співвідношенні між періодом модулюючого сигналу, носійної функції та інтергармонічних збурень.

Існує декілька підходів для вирішення цієї задачі. Зокрема в [86] вводиться поняття поточної спектральної характеристики, значення якої, на відміну від перетворення Фур'є, розраховується на скінченному інтервалі часу $[0, t]$:

$$F_t(j\omega) = \int_0^t f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.32)$$

що дає змогу розрахувати спектральну характеристику сигналу, який складається з двох складових: швидкої з частотою ω та повільної з частотою $1/t$.

Також відомий підхід з використання ряду Фур'є двох змінних, який широко використовується для опису ШІМ сигналів [87-89]:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) = & \frac{1}{2} A_{00} + \sum_{m_1=1}^{\infty} (A_{m_1 0} \cos(m_1 x_1) + B_{m_1 0} \sin(m_1 x_1)) + \sum_{m_2=1}^{\infty} (A_{0 m_2} \cos(m_2 x_2) + \\ & + B_{0 m_2} \sin(m_2 x_2)) + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} (A_{m_1 m_2} \cos(m_1 x_1 + m_2 x_2) + B_{m_1 m_2} \sin(m_1 x_1 + m_2 x_2)). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подвійний ряд у формулі (1.33) є нескінченною сумою комбінаційних гармонік функції двох змінних $y(x_1, x_2)$, рис. 1.7, де $x_1 = \omega_H t$ є аргументом носійної функції $y_H(x_1)$, що є періодичним сигналом з кутовою частотою ω_H і $x_2 = \omega_M t$ є аргументом модулюючої функції $y_M(x_2)$, що є періодичним сигналом з кутовою частотою ω_M , співвідношення між якими визначає кратність модуляції сигналу $P = x_1 / x_2$.

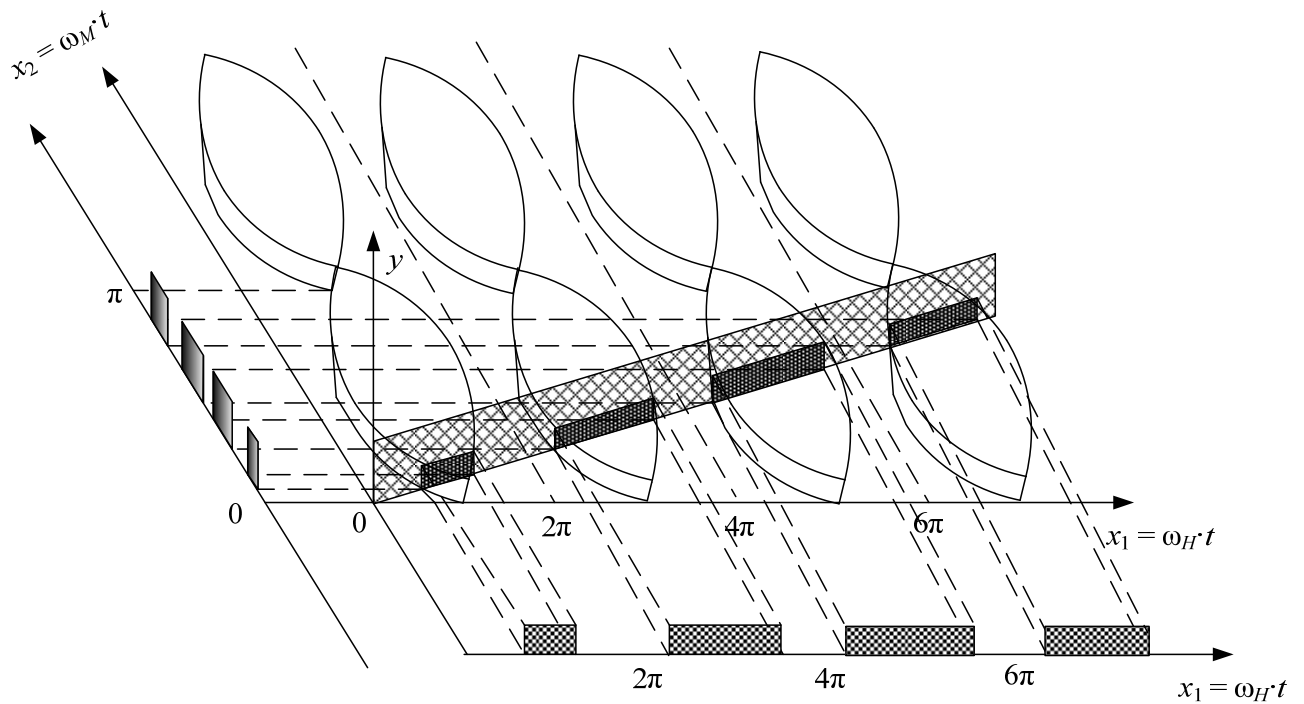


Рис. 1.7. Принцип опису модульованого сигналу $y(x_1, x_2)$ у просторі двох змінних

Така форма запису модульованого сигналу дає можливість враховувати комбінаційні гармоніки, тобто форма запису (1.33) дає змогу дослідити принцип утворення інтергармонік.

Коефіцієнти ряду $A_{(m_1)(m_2)}$ і $B_{(m_1)(m_2)}$ розраховуються за формулами:

$$A_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2) \cos(m_1 x_1 + m_2 x_2) dx_1 dx_2;$$

$$B_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2) \sin(m_1 x_1 + m_2 x_2) dx_1 dx_2,$$

або в комплексній формі:

$$C_{(m_1)(m_2)} = A_{(m_1)(m_2)} + jB_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2) e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

де $y(x_1, x_2)$ – модульована функція, $x_1 = \omega_1 t$, $x_2 = \omega_2 t$,

Розрахунок гармоніки C_k модульованого сигналу на основі спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$ здійснюється проекцією сигналу у двовимірному просторі на одну з осей координат x_1 або x_2 при заданому значенні параметра модуляції P . Проектування на вісь x_2 модулюючої функції виконується за формулою:

$$C_k = \sum_{m_1=0}^{\infty} C_{m_1(k-m_1 \cdot P)}. \quad (1.34)$$

За необхідності розрахунку струмів і напруг у ланцюгах з реактивними елементами до функції двох змінних, зображену на рис. 1.7, застосовують двовимірне перетворення Лапласа [90, 91]:

$$Y(p_1, p_2) = \frac{1}{(1 - e^{-2\pi p_1})(1 - e^{-2\pi p_2})} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2) \cdot e^{-p_1 x_1 - p_2 x_2} dx_1 dx_2, \quad (1.35)$$

де p_1, p_2 – оператори Лапласа змінних x_1 і x_2 відповідно.

Для одержання одновимірного зображення функції $y(t)$ необхідно в зображенні $Y(p_1, p_2)$ перейти до однієї змінної p [92]:

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{C_1 - j\infty}^{C_1 + j\infty} Y(p_1, p - p_1) dp_1 = \sum_i \text{res} [Y(p_1, p - p_1), p_{1(i)}], \quad (1.36)$$

або

$$Y(p) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{C_2 - j\infty}^{C_2 + j\infty} Y(p - p_2, p_2) dp_2 = \sum_i \text{res} [Y(p - p_2, p_2), p_{2(i)}], \quad (1.37)$$

де C_1 і C_2 – абсциси аналітичності функцій $Y(p_1, p - p_1)$ і $Y(p - p_2, p_2)$ відповідно; $p_{1(i)}$ і $p_{2(i)}$ – полюси цих функцій.

Функція $Y(p)$ використовується для аналізу усталеного режиму. При цьому здійснюється перехід від зображення $Y(p)$ до оригіналу в часовій області $y(t)$, що записується подвійним рядом Фур'є,

$$y(t) = \sum_k B_{0k} \cdot \sin(m_1 x_2) + \sum_{m_2=\pm 1}^{n=\pm\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} [A_{(m_2)(m_1)} \cdot \cos(m_1 x_1 + m_2 x_2) + B_{(m_2)(m_1)} \cdot \sin(m_1 x_1 + m_2 x_2)], \quad (1.38)$$

який задає усталений режим роботи.

Отже, ряд Фур'є двох змінних дає можливість аналізувати принцип утворення інтергармонік, а за умови використання двовимірного перетворення Лапласа, також можливо розрахувати квазіусталені струми і напруги після фільтра. Як правило форма аналізованого струму або напруги може бути визначена в

часовій області, тому використання двовимірного перетворення Лапласа у більшості випадків є надмірним і лише збільшує складність розрахунків. Однак обидва методи на даний момент використовуються для аналізу модульованих сигналів з ШІМ виключно в просторі двох змінних, що ускладнює визначення інтергармонік.

Отже, аналіз інтергармонічних складових в напівпровідникових перетворювачах доцільно здійснювати аналітичними методами, що дозволяють явно отримати залежність амплітуд комбінаційних гармонік від параметрів модульованих сигналів та збурень у системі. Як правило форма струму і напруги мережі, параметри якості яких аналізуються, може бути задана наперед, що дає можливість з більшою обчислювальною ефективністю аналізувати параметри сигналів у часовій області без використання перетворення Лапласа. Тому на практиці більш доцільно використовувати ряд Фур'є декількох змінних.

У роботах [93, 94] ряд Фур'є двох змінних використовується для розрахунку параметрів модульованих сигналів, сформованих напівпровідниковими перетворювачами з ШІМ і АШІМ без врахування збурень. У даних дослідженнях через значний обсяг розрахунків вони проводились перед синтезом системи керування, основні результати використовувались на етапі розробки закону модуляції, а не в реальному масштабі часу. Для підвищення ефективності керування перетворювачами необхідно використовувати високопродуктивні методи розрахунку параметрів якості електроенергії, для чого доцільно:

- розвинути теорію використання ряду Фур'є для функцій трьох або більше змінних, що дає можливість враховувати інтергармоніки, що виникають внаслідок періодичних збурень;
- розробити методи сумісного використання рядів однієї змінної з багатовимірними рядами зокрема для розрахунку перехідних процесів;
- розширити існуючі принципи розрахунку спектральних характеристик модульованих сигналів на сигнали зі змінною частотою носійної функції;
- розробити метод розрахунку інтегральних показників якості електроенергії у згорнутій аналітичній формі;

– реалізувати розроблені методи та методики для аналізу ефективності використання топологій і принципів керування напівпровідниковими перетворювачами електроенергії для вирішення багатопараметричних задач керування, однією з яких є покращення параметрів якості електроенергії.

Висновки до розділу 1

1. Показано, що в умовах постійного збільшення кількості і типів навантажень найдієвішим методом забезпечення необхідних значень параметрів якості електроенергії є інтеграція електротехнічного устаткування у єдину систему на основі напівпровідникових перетворювачів з можливістю плавного та динамічного регулювання режимів роботи, для чого необхідно розробити алгоритми гнучкого керування зі стабілізацією параметрів якості електроенергії.

2. Встановлено, що регулювання параметрів якості електроенергії за умови використання спеціалізованих топологій перетворювачів та адаптивних законів модуляції вихідної напруги ускладнюється за умови наявності реактивної потужності; несиметрії фазних напруг; вищих гармонік та інтергармонік струму, без усунення яких, як правило, параметри якості електроенергії мають незадовільні показники, тому актуальною є задачею розробка швидкодіючих методів оцінки параметрів якості електроенергії та інтеграція їх у сучасні системи керування напівпровідниковими перетворювачами.

3. Проаналізовано негативний вплив інтергармонік на значення параметрів електроенергії та складність їх розрахунку пов'язану з невизначеністю і постійною зміною періоду інтегрування та встановлено, що існуючі чисельні методи аналізу інтергармонік на основі ряду Фур'є мають значну похибку через ефект «розмивання спектра», а методи на основі вейвлет-перетворення мають інший базис функцій, що значно ускладнює розрахунок параметрів якості електроенергії, тому вони не можуть бути використані для синтезу законів модуляції напруги напівпровідникових перетворювачів, що враховують наявність у мережі інтергармонік.

4. Встановлено, що аналітичні методи розрахунку на основі ряду та перетворення Фур'є через жорстку прив'язку до фіксованого періода інтегрування є неефективними і потребують перерахунку спектра при зміні частоти одного з процесів, який бере участь у формуванні напруги мережі, тому для усунення громіздких перерахунків процеси, що беруть участь у формуванні напруги, доцільно описувати відносно незалежних змінних і отримувати узагальнені спектральні характеристики сумарного сигналу в M -вимірному просторі.

5. Показано, що серед існуючих методів, ряд Фур'є двох змінних і двовимірне перетворення Лапласа дозволяють представляти спектр в просторі двох змінних і запропоновано використовувати ряд Фур'є двох змінних, зважаючи на його відносну простоту, як базовий для подальшої адаптації для вирішення практичних задач.

РОЗДІЛ 2

ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ ДЛЯ АНАЛІЗУ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Утворення інтергармонік спричинено модуляцією параметрів напруги $u(2\pi f \cdot t)$ з частотою f , збурюючими факторами $y_{зб1}(2\pi f_{зб1} \cdot t)$, $y_{зб2}(2\pi f_{зб2} \cdot t) \dots y_{зб(M-1)}(2\pi f_{зб(M-1)} \cdot t)$ з частотами відповідно $f_{зб1}$, $f_{зб2} \dots f_{зб(M-1)}$, які не кратні частоті f . Найчастіше модульованим параметром є амплітуда, при цьому утворена напруга, що містить інтергармоніки $u_{ін}(t)$ є добутком напруги $u(2\pi f \cdot t)$ з функціями збурень:

$$u_{ін}(t) = u(t) \prod_{k=1}^{M-1} y_{зб(k)}(t). \quad (2.1)$$

Як відомо добуток сигналів C_H , $C_{зб1}$, $C_{зб2}, \dots, C_{зб(M-1)}$ у часовій області відповідає згортці їх спектрів [95-98]:

$$C_{IH} = C_H * C_{зб1} * C_{зб2} * \dots * C_{зб(M-1)}, \quad (2.2)$$

де C_{IH} , C_H , $C_{зб1}$, $C_{зб2}, \dots, C_{зб(M-1)}$ – спектральні характеристики вхідної напруги і збурюючих факторів, з частотами не кратними частоті напруги, на періоді, що є найменшим спільним кратним періодів цих процесів.

При розрахунку спектральної характеристики утвореної напруги $u_{ін}(t)$, зміна частоти хоча б одного збурюючого фактора призводить до зміни спектра напруги. Тому спектр напруги потрібно багаторазово перераховувати. Математичний апарат на основі узагальненого ряду Фур'є дозволяє одразу розрахувати спектр при довільних частотах напруги і збурюючих факторів, що значно зменшує обсяг розрахунків і спрощує подальший аналіз.

2.1. Властивості ряду Фур'є декількох змінних

Ряд Фур'є декількох змінних є широко відомими і детально описаний в літературі [99]. Однак при аналізі його використання для опису модульованих сигналів необхідно ввести необхідні позначення і підкреслити особливості ряду, важливі для даної прикладної задачі.

Ряд Фур'є M змінних x_1, x_2, \dots, x_M складається з постійної складової, що описується через спектральну компоненту $A_{(0) \dots (0)}$ з усіма нульовими індексами, косинусних спектральних компонент $A_{(m1) \dots (0)}$, $A_{(0)(m2) \dots (0)} \dots A_{(0) \dots (mM)}$, і синусних $B_{(m1) \dots (0)}$, $B_{(0)(m2) \dots (0)} \dots B_{(0) \dots (mM)}$ з одним ненульовим індексом, що описують

незалежну дію M процесів на спектр сумарної напруги (струму), та комбінаційних компонент з двома і більше ненульовими індексами, що описують зміну спектра внаслідок взаємодії процесів і відповідають ненульовим значенням індексів:

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2, \dots, x_M) = & \frac{1}{2} A_{(0) \dots (0)} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(A_{m_1 \dots 0} \cos(m_1 x_1) + B_{m_1 \dots 0} \sin(m_1 x_1) \right) + \\
& + \sum_{m_2=1}^{\infty} \left(A_{(0) \dots (m_2) (0)} \cos(m_2 x_2) + B_{(0) \dots (m_2) (0)} \sin(m_2 x_2) \right) + \dots + \\
& + \sum_{m_M=1}^{\infty} \left(A_{(0) \dots (m_M)} \cos(m_M x_M) + B_{(0) \dots (m_M)} \sin(m_M x_M) \right) + \\
& + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(A_{(m_1)(m_2) \dots (0)} \cos(m_2 x_2 + m_1 x_1) + B_{(m_1)(m_2) \dots (0)} \sin(m_2 x_2 + m_1 x_1) \right) + \\
& + \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(A_{m_1 0 m_3 \dots 0} \cos(m_3 x_3 + m_1 x_1) + B_{m_1 0 m_3 \dots 0} \sin(m_3 x_3 + m_1 x_1) \right) + \dots + \\
& + \sum_{m_M=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(A_{m_1 \dots m_M} \cos(m_M x_M + m_1 x_1) + B_{m_1 \dots m_M} \sin(m_M x_M + m_1 x_1) \right) + \dots + \\
& + \sum_{m_M=1}^{\infty} \dots \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(A_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} \cos\left(\sum_{i=1}^M m_i x_i\right) + B_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} \sin\left(\sum_{i=1}^M m_i x_i\right) \right). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Тому на основі ряду Фур'є дуже зручно описувати спектр модульованих струмів і напруг, що утворюються внаслідок взаємодії, як мінімум модулюючої і носійної функцій.

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}$ ряду Фур'є M змінних розраховуються за формулою:

$$C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} = A_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} + j B_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} = \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i. \quad (2.4)$$

Далі по тексту, якщо не зазначене інакше, вважається, що змінна x_1 є аргументом носійної функції y_H , $y_H = f(x_1)$, змінна x_2 – модулюючої функції y_M , $y_M = f(x_2)$, змінні $x_3 \dots x_M$ – аргументами збурюючих факторів, що утворюють інтергармонічні складові $y_{z\delta(1)} \dots y_{z\delta(M-2)}$, $y_{z\delta(1)} = f(x_3), \dots, y_{z\delta(M-2)} = f(x_M)$.

Сукупність спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}$ містить повну інформацію про модульований сигнал при довільному співвідношенні частот M складових, що беруть участь у формуванні модульованого сигналу. Якщо співвідношення між змінними x_1, x_2, \dots, x_M модульованого сигналу y у M -вимірному просторі є відомим,

то можливо перейти в часову область і розрахувати спектр, що складається з гармонік заданого модульованого сигналу C_k .

Якщо кутова частота модулюючої функції ω_2 є найменшою серед частот $\omega_1.. \omega_M$ складових модульованого сигналу і частоти $\omega_1.. \omega_M$ кратні частоті ω_2 , то перша гармоніка модульованого сигналу C_1 матиме частоту модулюючої функції ω_2 , а значення k -ої гармоніки розраховується за формулою:

$$C_k = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} C_{(m_1)(k-m_1P-m_3P_3\dots-m_MP_M)(m_3)(m_4)..(m_M)}, \quad (2.5)$$

де $P, P_3..P_M$ – кратності модуляції складових модульованого сигналу.

Відповідно до формули (2.5) гармоніка C_k є сумою всіх спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)..(m_M)}$, сума індексів яких з врахуванням кратності модуляції складових дорівнює k .

Якщо відоме співвідношення частот між довільними компонентами x_i та x_k , $x_k / x_i = P_{ki}$ можливо звести ряд Фур'є M змінних до ряду $M-1$ змінних, виключивши змінну x_i , за формулою:

$$C_{(m_1)(m_2)..(m_{i-1})(m_{i+1})..(m_k)..(m_M)} = \sum_{m_k=0}^{\infty} C_{(m_1)(m_2)..(m_{i-1})(m_i-P_{ki}m_k)(m_{i+1})..(m_k)..(m_M)}. \quad (2.6)$$

За умови, що частота однієї або більше складових модульованого сигналу не кратна частоті модулюючої функції ω_2 , шукають таке найменше спільне кратне періодів $T_1..T_M$, $T_{Lcm} = Lcm(T_1, T_2..T_M)$, щоб для будь-якого i виконувалась умова кратності модуляції $P_{Lcm(i)}$ довільної складової модульованого сигналу відносно періоду T_{Lcm} , $P_{Lcm(i)} = T_{Lcm} / T_i$, що є цілим числом, $P_{Lcm(i)} \in N$. У цьому випадку число V , що визначає кількість періодів модулюючої функції на періоді визначення спектра T_{Lcm} , розраховується як:

$$V = \frac{T_{Lcm}}{T_2}, \quad (2.7)$$

де T_2 – період модулюючої функції.

У цьому випадку перша гармоніка модульованого сигналу C_1 матиме частоту $\omega_{Lcm} = 2\pi / T_{Lcm}$, а частота модулюючої функції відповідає гармоніці C_k :

$$C_k = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} C_{(m_1)(k-V(m_1 \cdot P + m_3P_3\dots+m_MP_M))(m_3)(m_4)..(m_M)}. \quad (2.8)$$

Властивості рядів Фур'є широко відомі [100], серед основних властивостей доречно виділити: властивості лінійності, циклічного зсуву, оскільки аналіз властивостей модульованих сигналів на основі рядів Фур'є декількох змінних тісно пов'язаний з цими властивостями, тому вони описані нижче більш детально.

При аналізі властивостей рядів Фур'є декількох змінних вважається що сигнали $y_1(x_1, x_2, \dots, x_M)$, $y_2(x_1, x_2, \dots, x_M)$, до яких застосовується ряд Фур'є, є періодичними, мають однакові періоди T_1, T_2, \dots, T_M за змінними x_1, x_2, \dots, x_M відповідно, та задовольняють умовам Діріхле [101, 102].

Властивість лінійності

При аналізі властивості лінійності вважається, що сума сигналів y_1 і y_2 дорівнює:

$$y_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, x_M) = y_1(x_1, x_2, \dots, x_M) + y_2(x_1, x_2, \dots, x_M). \quad (2.9)$$

В цьому випадку

$$\begin{aligned} C_{\Sigma(m_1)(m_2) \dots (m_M)} &= \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i = \\ &= \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y_1(x_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i + \\ &+ \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y_2(x_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i \\ &= C_{1(m_1)(m_2) \dots (m_M)} + C_{2(m_1)(m_2) \dots (m_M)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким чином спектральні компоненти суми періодичних сигналів дорівнюють сумі спектральних компонент сигналів.

Властивість циклічного зсуву

Циклічний зсув сигналу в часовій області виникає за умови часової затримки сигналу керування або в двотактних або багатоканальних перетворювачах, в яких сигнал керування кожної з фаз зсунутий на певний кут [103-106]. На рис. 2.1 наведена ілюстрація циклічного зсуву для трьохканальної системи, сигнал керування якої описується у просторі двох змінних x_1 і x_2 , з зсувом на кут $2\pi / 3$ відносно носійної функції з аргументом x_1 : рис. 2.1, а зсув відбувається відносно змінної x_1 , рис. 2.1, б – відносно змінних x_1 і x_2 .

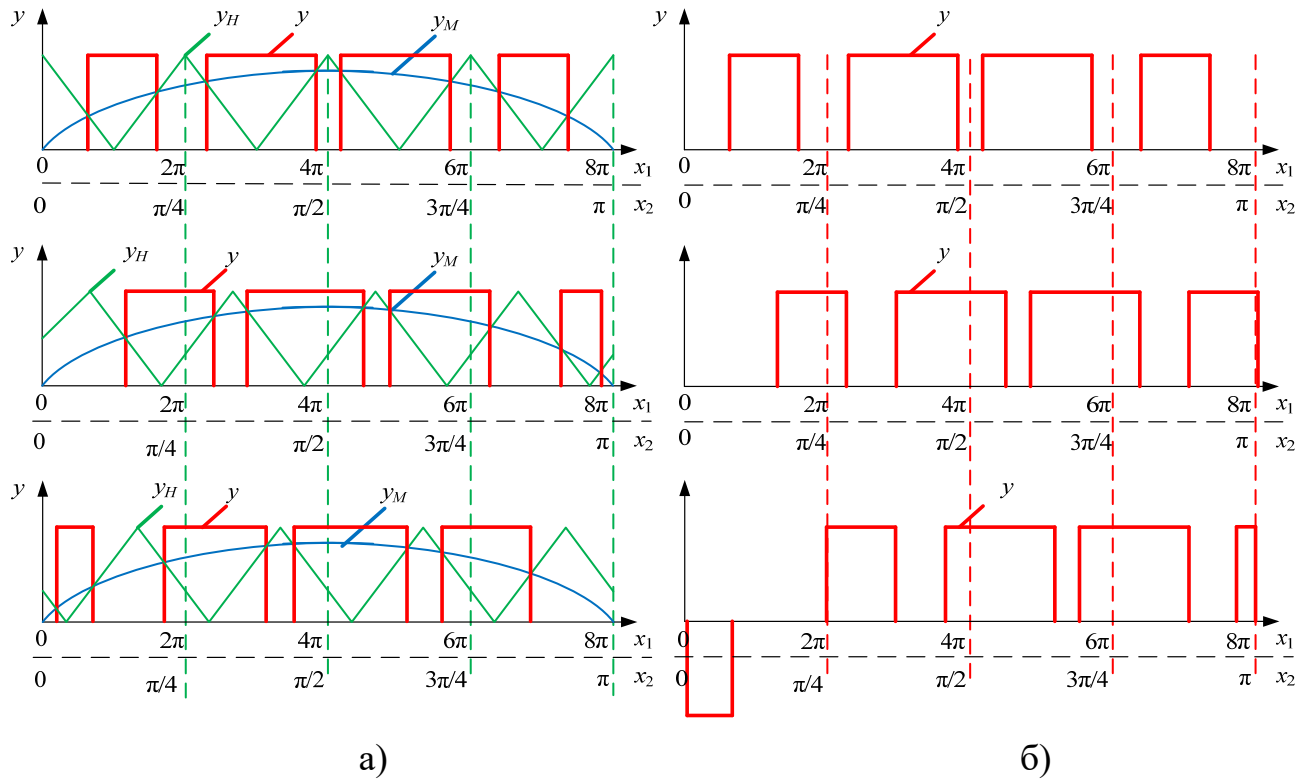


Рис. 2.1. Ілюстрація до властивості циклічного зсуву

Згідно з рис 2.1, а зсув лише відносно носійної функції з аргументом x_1 спричиняє формування відмінного від початкового модульованого сигналу, тоді як синхронний зсув модулюючої і носійної функцій не змінює форму модулюючого сигналу, а лише зміщує координати імпульсів.

Математично зсув φ_1 відносно однієї змінної x_1 описується наступним чином:

$$C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)sh} = \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y(x_1 - \varphi_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i. \quad (2.11)$$

Зробимо заміну $x_{1sh} = x_1 - \varphi_1$. У цьому випадку $x_1 = x_{1sh} + \varphi_1$, $dx_1 = dx_{1sh}$.

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)sh} &= \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y(x_{1sh}, x_2, \dots, x_M) e^{j \left(m_1 (x_{1sh} + \varphi_1) + \sum_{i=2}^M m_i x_i \right)} dx_{1sh} \prod_{i=2}^M dx_i = \\ &= e^{jm_1 \varphi_1} C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Після переходу до спектра в просторі однієї змінної, формула (2.8), отримаємо:

$$C_{k(sh)} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e^{jm_1\varphi_1} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} C_{(m_1)(k-V(m_2 \cdot P + m_3 P_3 \dots + m_M P_M))(m_3)(m_4) \dots (m_M)} = (2.13)$$

$$= \frac{1}{e^{j\varphi_1} - 1} C_k,$$

що свідчить про зміну спектра як за фазою, так і за амплітудою, як і показано на рис. 2.1, а. При цьому відбувається циклічний зсув носійної функції y_1 на її періоді T_1 . Перетворення, аналогічні формулам (2.12) і (2.13), застосовуються до будь-якої змінної узагальненого ряду, окрім змінної x_2 , що відповідає модулюючій функції, оскільки відповідно до формули (2.8) переходу від спектра багатовимірного ряду $C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}$ до спектра одновимірного ряду C_k індекс по змінній x_2 розраховується за іншим правилом:

$$C_{k(sh)} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} e^{j(k-V(m_2 \cdot P + m_3 P_3 \dots + m_M P_M))\varphi_2} \times$$

$$\times C_{(m_1)(k-V(m_2 \cdot P - m_3 P_3 \dots - m_M P_M))(m_3)(m_4) \dots (m_M)} = (2.14)$$

$$= e^{j(k-V(m_2 \cdot P - m_3 P_3 \dots - m_M P_M))\varphi_2} \frac{e^{jk\varphi_2}}{(e^{j\varphi_2 VP} - 1) \prod_{i=3}^M (e^{j\varphi_2 VP_i} - 1)} C_k.$$

Тобто фазовий зсув модулюючої функції є відмінним від інших.

При узагальненні співвідношень (2.12)-(2.14) на l змінних доцільно розглянути випадки:

- до складу змінних, до яких застосовується зсув, не входить змінна x_2 ;
- серед змінних, що зсуваються, входить змінна x_2 .

Для першого випадку, якщо до зсуву належать l змінних $x_1, x_3 \dots x_{l+1}$, формули (2.12) і (2.13) перетворюються до виду:

$$C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)sh} = C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} e^{jm_1\varphi_1} \prod_{i=3}^{l+1} e^{jm_i\varphi_i}; \quad (2.15)$$

$$C_{k(sh)} = C_k \frac{1}{e^{j\varphi_1} - 1} \prod_{i=3}^{l+1} \frac{1}{e^{j\varphi_i} - 1}. \quad (2.16)$$

У другому випадку, якщо до зсуву належать l змінних $x_1, x_2 \dots x_l$, формула для розрахунку спектральних компонент аналогічна (2.15), гармоніка $C_{k(sh)}$ розраховується за формулою:

$$C_{k(sh)} = C_k \frac{1}{e^{j\varphi_1} - 1} \frac{e^{jk\varphi_2}}{(e^{j\varphi_2 VP} - 1) \prod_{i=3}^M (e^{j\varphi_2 VP_i} - 1)} \prod_{i=3}^l \frac{1}{e^{j\varphi_i} - 1}. \quad (2.17)$$

Особливим випадком є зміщення всіх змінних на однаковий кут $\varphi_2 = \varphi_1 P = \varphi_3 P_3 = \dots = \varphi_M P_M$, що відповідає зміщенню модульованого сигналу на цей кут без зміни його форми, рис. 2.1, б:

$$\begin{aligned} C_{k(sh)} &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} e^{j(k-V(m_2 \cdot P + m_3 P_3 \dots + m_M P_M))\varphi_2} e^{jV(m_2 \cdot P)\varphi_2} \times \\ &\times \prod_{i=3}^M e^{jV(m_i \cdot P_i)\varphi_2} \times C_{(m_1)(k-V(m_2 \cdot P + m_3 P_3 \dots + m_M P_M))(m_3)(m_4) \dots (m_M)} = \\ &= e^{jk\varphi_2} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \dots \sum_{m_M=0}^{\infty} C_{(m_1)(k-V(m_2 \cdot P + m_3 P_3 \dots + m_M P_M))(m_3)(m_4) \dots (m_M)} = e^{jk\varphi_2} C_k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Лише в цьому випадку, вираз (2.18), циклічний зсув компонент узагальненого ряду Фур'є відповідає теоремі запізнення для ряду Фур'є однієї змінної [107].

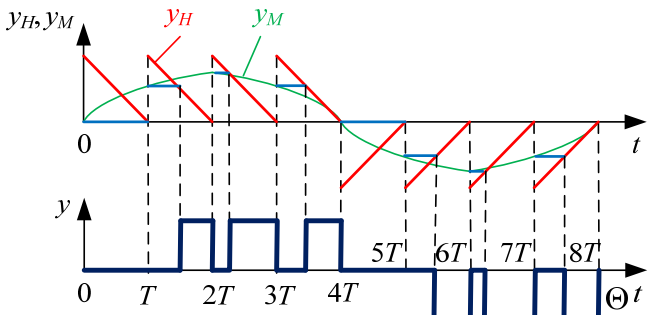
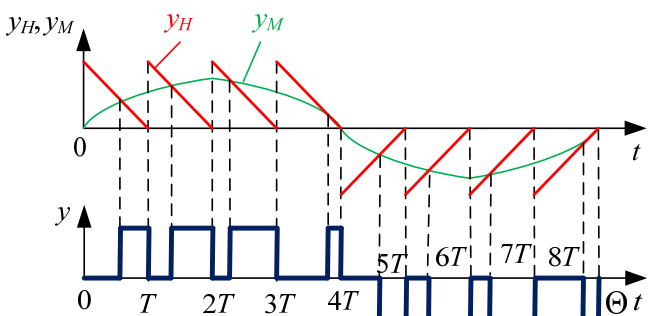
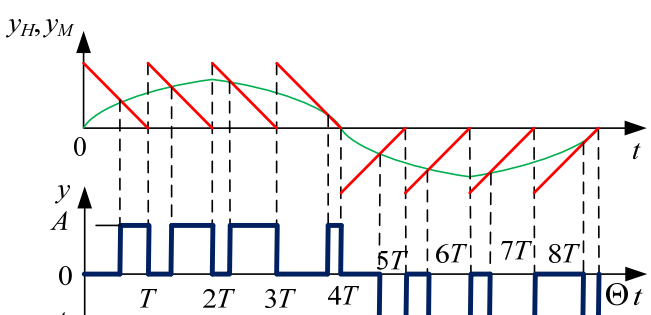
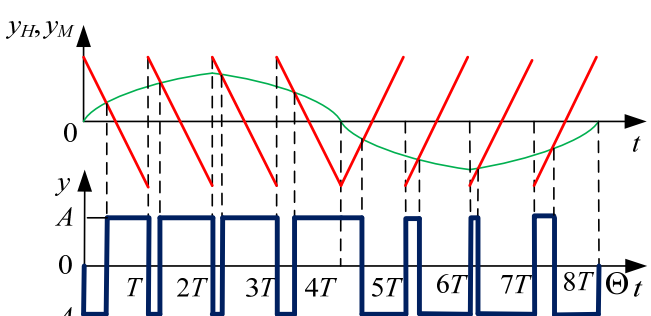
2.2. Аналіз спектрів ШІМ сигналів узагальненого ряду Фур'є

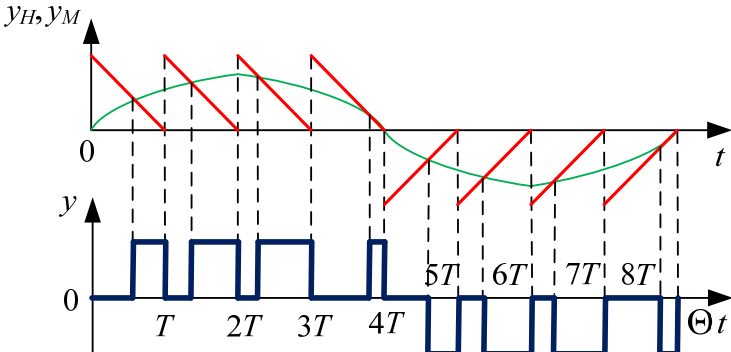
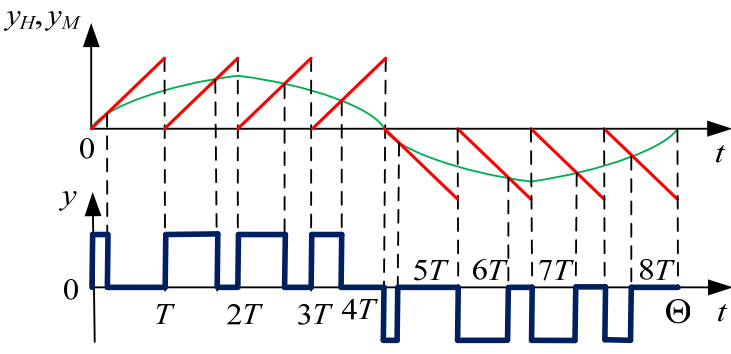
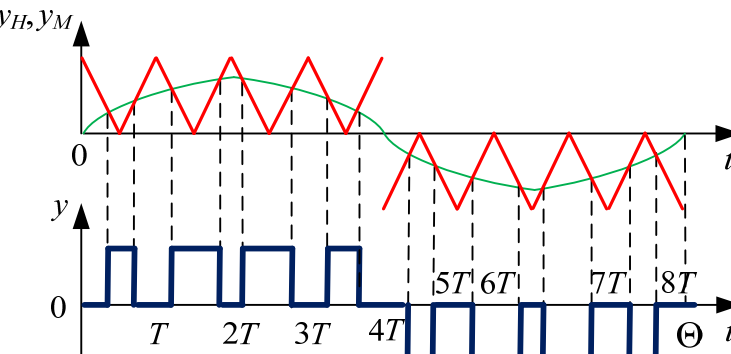
На даний момент теорія рядів Фур'є двох змінних широко використовується для аналізу спектра модульованих сигналів з постійною частотою носійної функції, $f_H = \text{const}$, а саме ШІМ та АШІМ сигналів, що класифікують за такими критеріями [108-110]:

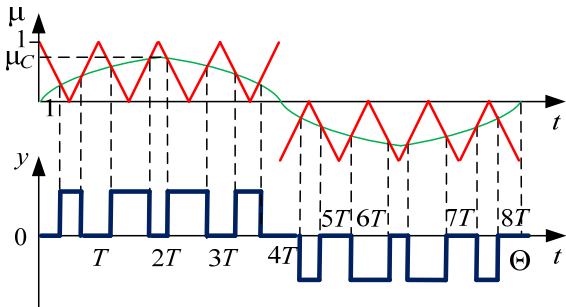
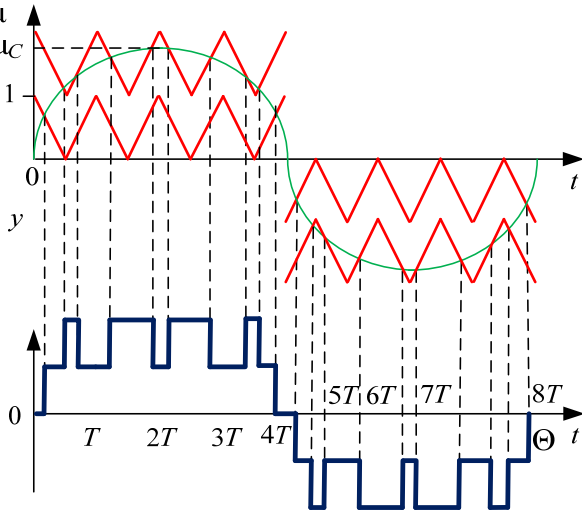
- рід модуляції: I, II або III роду;
- кількість рівнів модуляції: однополярна – 3 рівні модуляції, двополярна – 2 рівні модуляції;
- фронт модуляції: передній задній, двостороння модуляція;
- глибина модуляції μ : $0 < \mu \leq 1$ – ШІМ, $\mu > 1$ – АШІМ.

Аналітичні вирази спектральних компонент в просторі двох змінних є базовими для більш складних законів модуляції. Для їх отримання використано класифікацію ШІМ та АШІМ сигналів, що наведена у табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Класифікація ШІМ та АШІМ сигналів

Критерій класифікації	Принцип формування
Рід модуляції	<p style="text-align: center;">ШІМ-I</p>  $y_H(t) = y_M(nT), n \in N$ <p style="text-align: center;">ШІМ-II</p>  $y_H(t - nT) = y_M(t - nT), n \in N$
Кількість рівнів модуляції	<p style="text-align: center;">Однополярна (3 рівні модуляції: $A, 0, -A$)</p>  <p style="text-align: center;">Двополярна (2 рівні модуляції: $A, -A$)</p> 

Критерій класифікації	Принцип формування
Фронт модуляції	<p data-bbox="730 331 1222 371">Модуляція переднього фронту</p>  <p data-bbox="751 815 1201 855">Модуляція заднього фронту</p>  <p data-bbox="786 1283 1166 1323">Двостороння модуляція</p> 

Критерій класифікації	Принцип формування
Глибина модуляції	<p style="text-align: center;">$\mu \leq 1$ (ШІМ)</p>  <p style="text-align: center;">$\mu > 1$ (АШИМ)</p> 

У найпростішому випадку, при відсутності збурень спричинених зміною опору навантаження та вхідної напруги, модульований сигнал формується на основі носійної функції y_H , що описана в просторі змінної x_1 , та модулюючої функції y_M зі змінною x_2 . Тому загальний запис для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу базується на ряді Фур'є двох змінних:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{f_1(y_M(x_2))}^{f_2(y_M(x_2))} y(x_1, x_2) e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (2.19)$$

де f_1, f_2 – деякі функції від модулюючої функції y_M , що задають координати переднього і заднього фронту імпульсів модуляції на періоді носійної функції y_H .

Оскільки співвідношення між змінними $x_1 = \omega_1 t$, де ω_1 – кутова частота носійної функції, та $x_2 = \omega_2 t$, де ω_2 – кутова частота модулюючої функції, еквівалентне кратності модуляції P , $P = x_1 / x_2$, то при інтегруванні по змінній x_2 в діапазоні від 0 до 2π , інтегрування по змінній x_1 здійснюється в діапазоні від 0 до $2\pi P$, тобто P періодів носійної функції y_H . При цьому на кожному періоді носійної функції значення меж інтегрування f_1, f_2 змінюються відповідно до заданого закону модуляції.

Принцип визначення функцій f_1, f_2 для однополярної ШІМ-II переднього, заднього фронту та двосторонньої модуляції проілюстровано на рис. 2.2, а, б і в відповідно для пилоподібної форми носійної функції.

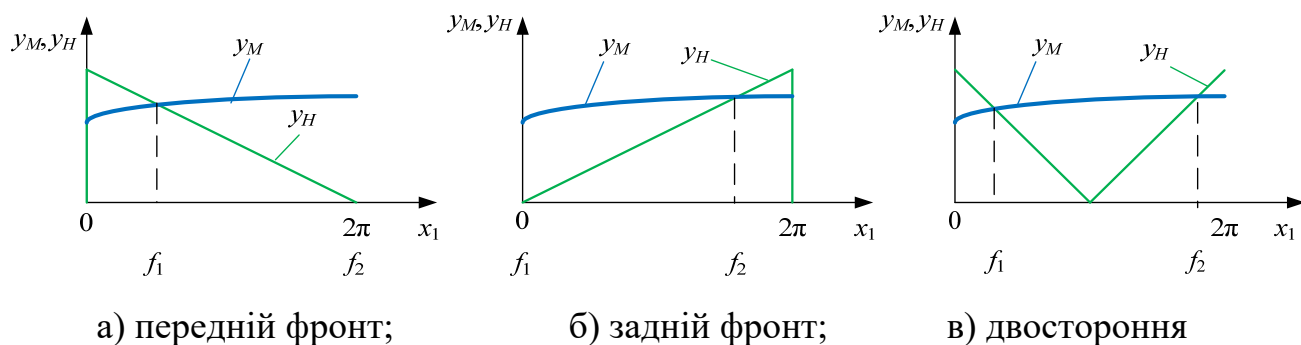


Рис. 2.2. Ілюстрація до визначення меж інтегрування f_1, f_2 ШІМ-II: а) переднього фронту; б) заднього фронту; в) двосторонньої модуляції

Згідно з рис. 2.2. межі інтегрування f_1 – для модуляції заднього фронту та f_2 – для модуляції переднього фронту відомі, інші межі інтегрування знаходяться як точки перетину прямих, на основі яких задається носійна функція y_H і модулюючої функції y_M :

- модуляція переднього фронту:

$$y_M(x_2) = y_H(x_1) \Rightarrow y_M(x_2) = 1 - k_H x_1 = 1 - x_1 / 2\pi, \quad (2.20)$$

де k_H – тангенс кута нахилу прямої, якою описується носійна функція;

- модуляція заднього фронту:

$$y_M(x_2) = k_H x_1 = x_1 / 2\pi; \quad (2.21)$$

- двостороння модуляція:

$$y_M(x_2) = \begin{cases} 1 - k_H x_1 = 1 - x_1 / \pi, 0 \leq x_1 < \pi; \\ k_H x_1 - 1 = x_1 / \pi - 1, \pi \leq x_1 < 2\pi. \end{cases} \quad (2.22)$$

Значення меж інтегрування знаходиться для кожного типу модуляції вираженням змінної x_1 з рівнянь (2.20)-(2.22):

- модуляція переднього фронту:

$$f_2 = x_1 = 2\pi(1 - y_M(x_2)); \quad (2.23)$$

- модуляція заднього фронту:

$$f_1 = x_1 = 2\pi y_M(x_2); \quad (2.24)$$

- двостороння модуляція:

$$f_1 = x_1 = \pi(1 - y_M(x_2)); f_2 = x_1 = \pi(y_M(x_2) + 1). \quad (2.25)$$

У випадку двосторонньої модуляції значення пилкоподібної функції змінюється в діапазоні $y_H \in [-1; 1]$, тому значення тангенса кута нахилу прямої $k_H^* = 2k_H$. Формули для ШІМ-I є аналогічними формулам (2.20)-(2.25) за умови заміни значення змінної x_2 на її фіксоване значення x_2' , що береться на початку кожного інтервалу носійної функції.

У таблиці 2.2 наведено значення меж інтегрування f_1 і f_2 для типового випадку, коли значення модулюючої функції дорівнює нормованій синусоїдальній функції з одиничною амплітудою, $y_M = \mu \cdot \sin(x_2)$, де μ – глибина модуляції сигналу.

Підстановка меж інтегрування, наведених у табл. 2.2, до формули (2.19) дає змогу обрахувати спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу. Наприклад, для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-II з двосторонньою модуляцією, що складається з прямокутних імпульсів амплітудою A , отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (2.26)$$

Таблиця 2.2. Значення меж інтегрування f_1 і f_2

ШІМ-II однополярна		
Передній фронт $f_1 = 2\pi(1-\mu \cdot \sin(x_2))$ $f_2 = 2\pi$	Задній фронт $f_1 = 0$ $f_2 = 2\pi \cdot \mu \cdot \sin(x_2)$	Двостороння $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2))$ $f_2 = \pi(1+\mu \cdot \sin(x_2))$
ШІМ-II двополярна		
Передній фронт $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2))$ $f_2 = 2\pi$	Задній фронт $f_1 = 0$ $f_2 = \pi \cdot (1+\mu \cdot \sin(x_2))$	Двостороння $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2))/2$ $f_2 = 3\pi(1+\mu \cdot \sin(x_2))/2$
ШІМ-I однополярна		
Передній фронт $f_1 = 2\pi(1-\mu \cdot \sin(x_2'))$ $f_2 = 2\pi$	Задній фронт $f_1 = 0$ $f_2 = 2\pi \cdot \mu \cdot \sin(x_2')$	Двостороння $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2'))$ $f_2 = \pi(1+\mu \cdot \sin(x_2'))$
ШІМ-I двополярна		
Передній фронт $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2'))$ $f_2 = 2\pi$	Задній фронт $f_1 = 0$ $f_2 = \pi \cdot \mu \cdot \sin(x_2')$	Двостороння $f_1 = \pi(1-\mu \cdot \sin(x_2'))/2$ $f_2 = 3\pi(1+\mu \cdot \sin(x_2'))/2$

Спектральні компоненти $C_{(m1)(m2)}$ в формулі (2.26) розраховуються на основі суми двох інтегралів, оскільки модулююча функція $y_M = \mu \cdot \sin(x_2)$ змінює свою полярність кожні півперіода і тому на інтервалі $x_2 \in [0; \pi)$ амплітуда імпульсів модульованого сигналу дорівнює A , $y(x_1, x_2) = A$, тоді як на інтервалі $[\pi; 2\pi)$ $y(x_1, x_2) = -A$. Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $[0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x_2+\pi))} dx_1 dx_2 \right) =$$

$$= \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (2.27)$$

Відповідно до формули (2.27) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{A(-1)^{m_1}}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi e^{j((2m_2-1)x_2+m_1\pi\mu\sin(x_2))} - e^{j((2m_2-1)x_2-m_1\pi\mu\sin(x_2))} dx_2 =$$

$$= \frac{2A(-1)^{m_1}}{j\pi m_1} \left(J_{2m_2-1}(-m_1\pi\mu) - J_{2m_2-1}(-m_1\pi\mu) \right) =$$

$$= \frac{4Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{2m_2-1}(m_1\pi\mu), \quad (2.28)$$

де $J_a(b)$ – функція Бесселя першого роду порядку a від аргументу b [111].

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-II з двосторонньою модуляцією мають ненульові, уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (2.28):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi 2\pi\mu\sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Для розрахунку спектральних компонент для ШІМ-I в межі інтегрування підставляється модулююча функція з фіксованим значенням аргументу x_2' . Значення x_2' найчастіше фіксується відносно початку, середини або кінця періоду

носійної функції [112]. Вираз для розрахунку спектральної характеристики $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з двосторонньою модуляцією описується виразом:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu \sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu \sin(x'_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu \sin(x'_2))}^{\pi(1-\mu \sin(x'_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (2.30)$$

Фіксацію змінної x_2 можна забезпечити відніманням від неї аргументу носійної функції x_1 з врахуванням кратності модуляції P .

$$x'_2 = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad (2.31)$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$\begin{aligned} x_2 &= x'_2 + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}; \\ dx_2 &= dx'_2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

у формулі (2.30), отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu \sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu \sin(x'_2))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x'_2 + (x_1 - \varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu \sin(x'_2))}^{\pi(1-\mu \sin(x'_2))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x'_2 + (x_1 - \varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Після перетворень тотожним формулам (2.27), (2.28), отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{4Aj(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} J_{2m_2-1}(\pi\mu(m_1 + (2m_2 - 1) / P)). \quad (2.34)$$

Аналогічно розраховуються спектральні компоненти інших різновидів ШІМ, значення яких наведені у табл. 2.3, виведення отриманих аналітичних виразів наведено у додатку Б.

Таблиця 2.3. Аналітичні вирази спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$ для розглянутих різновидів ШІМ

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
ШІМ-II однополярна	
Передній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi m_1} \left(\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(2m_1\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2-1+2\nu} + \frac{1}{2m_2-1-2\nu} \right) \right) + \frac{2(J_0(2m_1\pi\mu) + 1)}{\pi(2m_2-1)} + jJ_{2m_2-1}(2m_1\pi\mu) \right).$
Задній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi m_1} \left(\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(2m_1\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2-1+2\nu} + \frac{1}{2m_2-1-2\nu} \right) \right) + \frac{2(J_0(2m_1\pi\mu) - 1)}{\pi(2m_2-1)} + jJ_{2m_2-1}(2m_1\pi\mu) \right).$
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{2m_2-1}(m_1\pi\mu).$
ШІМ-II двополярна	
Передній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A}{\pi m_1} \left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0(m_1\pi\mu) + 1)}{\pi(2m_2-1)} + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}(m_1\pi\mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(m_1\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2-1+2\nu} + \frac{1}{2m_2-1-2\nu} \right) \right) \right).$

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
Задній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A}{\pi m_1} \left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0(m_1 \pi \mu) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}(m_1 \pi \mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(m_1 \pi \mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right).$
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0; C_{(0)(2m_2-1)} = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0; \end{cases}$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{4jA(-1)^{m_1/2}}{m_1 \pi^2} J_{2m_2-1}(0.5m_1 \pi \mu).$
ШІМ-I однополярна	
Передній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1)/P)} \times$ $\left(\frac{2(J_0((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu) + 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right).$
Задній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1)/P)} \times$ $\left(\frac{2(J_0((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)2\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right).$
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{4jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1)/P)} J_{2m_2-1}(\pi\mu(m_1 + (2m_2 - 1)/P)).$

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
ШІМ-I двополярна	
Передній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times$ $\left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu) + (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}))}{\pi(2m_2 - 1)} + \right.$ $+ (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu) + \right.$ $\left. \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right).$
Задній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times$ $\left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0((m_1 + (2m_2 - 1) / P)) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)) \right. \right.$ $\left. \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1) / P))}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right).$
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $\frac{4Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + m_2 / P)} \times$ $\times \left(2j(-1)^{\frac{m_1}{2}} e^{j(2m_2-1)\pi/P} J_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu / 2) + \frac{(1 - e^{j2\pi(2m_2-1)/P})}{2\pi(2m_2 - 1)} \right)$

Аналітичні вирази спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$ ряду Фур'є двох змінних можуть бути узагальнені на ряд із M змінних $C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}$. Якщо межі інтегрування f_1, f_2 при формуванні модульованого сигналу залежать лише від модулюючої функції u_M , а в модульованій функції $y(x_1, x_2, \dots, x_M)$ можна розділити змінні, $y(x_1, x_2, \dots, x_M) = y_1(x_1, x_2) \cdot y_2(x_3, \dots, x_M)$, формулу (2.4) можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)} &= \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=1}^M m_i x_i} \prod_{i=1}^M dx_i = \\
&= \frac{C_{(m_1)(m_2)}}{2^{M-2} \pi^{M-2}} \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} y(x_3, \dots, x_M) e^{j \sum_{i=3}^M m_i x_i} \prod_{i=3}^M dx_i \right).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Якщо межі інтегрування залежать від збурюючих факторів $u_3 \dots u_M$ – вираз для спектральних компонент потрібно перераховувати повністю.

Для формування трифазної напруги існує декілька додаткових методів модуляції. Їх основна мета – збільшити амплітуду першої гармоніки зі збереженням значення коефіцієнта гармонік. При цьому при використанні класичної трифазної ШІМ вихідна напруга інвертора складає лише 86.6 % від випрямленої напруги мережі [113-115].

Для підвищення амплітуди першої гармоніки до модулюючої функції кожної фази підмішують третю гармоніку, що дозволяє збільшити амплітуду першої гармоніки [115], при цьому підмішана третя гармоніка взаємокомпенсується у трифазній системі не призводячи до погіршення спектрального складу вихідної напруги. Найрозповсюдженішими методами для підвищення амплітуди першої гармоніки є трифазна ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою [115] і векторна ШІМ [116].

При реалізації ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою в модульований сигнал кожної фази додається третя гармоніка, що утворює сигнал нульової послідовності [117] за законом:

$$\begin{aligned}
y_{MA}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(\sin(\varphi) + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \sin(3\varphi) \right) = \mu^* \left(\sin(\varphi) + a^* \sin(3\varphi) \right); \\
y_{MB}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \sin(3\varphi) \right) = \mu^* \left(\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + a^* \sin(3\varphi) \right); \\
y_{MC}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \left(\sin\left(\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \sin(3\varphi) \right) = \mu^* \left(\sin\left(\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + a^* \sin(3\varphi) \right),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

тобто амплітуда першої гармоніки при використанні цього закону модуляції збільшується в $1/\cos(\pi/6) = 2/\sqrt{3}$ разів.

Формули модулюючої функції векторної ШІМ, подібні до ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою, однак на відміну від останньої містять всі непарні гармоніки кратні трьом, що в сумі утворюють нульову послідовність nn .

$$\begin{aligned} y_{MA}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \sin(\varphi) + nn(\varphi); \\ y_{MB}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + nn(\varphi); \\ y_{MC}(\varphi) &= \frac{\mu}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \sin\left(\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + nn(\varphi). \end{aligned} \quad (2.37)$$

На практиці модулюючу функцію векторної ШІМ разом з нульовою послідовністю nn формують алгоритмічно, на основі векторного представлення трифазної напруги, що утворюється поділом період роботи перетворювача на 6 секторів [116].

Формування модульованого сигналу з передмодуляцією третьою гармонікою або з векторною ШІМ можливе на основі як ШІМ-I, так і ШІМ-II. Зважаючи, що ці методи модуляції використовуються в цифрових системах керування, як правило, використовується ШІМ-I [118, 119]. Спектральні компоненти для відомих типів модуляції наведено у табл. 2.4. Виведення формул для кожного типу модуляції наведено у додатку Б.

Таблиця 2.4. Спектральні компоненти для ШІМ сигналів з передмодуляцією третьою гармонікою та векторної ШІМ

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
Сигнал з передмодуляцією третьою гармонікою з однополярною ШІМ-I	
Передній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(\frac{2}{2m_2-1} - \frac{4J_0(za^*)J_{2m_2-1}(z)}{2m_2-1} - \right.$ $+ 2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \left(\frac{1}{2m_2+2n_1-1} - \frac{1}{2m_2-2n_1-1} \right) +$ $+ 2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \left(\frac{1}{2m_2+6n_2-1} - \frac{1}{2m_2-6n_2-1} \right)$ $+ 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+n_1-3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1+3n_2)-1} + \right.$ $\left. \frac{1}{2(m_2+n_1+3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1-3n_2)-1} \right) +$ $+ \pi \left(J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \right.$ $- \sum_{n_1-3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) -$ $- \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) -$ $- \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) -$ $\left. - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \right) +$ $2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+3n_2-n_1)-1} + \frac{1}{2(m_2-3n_2+n_1)-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2(m_2+3n_2+n_1)-1} - \frac{1}{2(m_2-3n_2-n_1)-1} \right).$

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
Задній фронт	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(-\frac{2}{2m_2-1} + \frac{4J_0(za^*)J_{2m_2-1}(z)}{2m_2-1} - \right.$ $+ 2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \left(\frac{1}{2m_2+2n_1-1} - \frac{1}{2m_2-2n_1-1} \right) +$ $+ 2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \left(\frac{1}{2m_2+6n_2-1} - \frac{1}{2m_2-6n_2-1} \right) +$ $+ 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+n_1-3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1+3n_2)-1} + \right.$ $\left. \frac{1}{2(m_2+n_1+3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1-3n_2)-1} \right) +$ $+ \pi \left(J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \right.$ $- \sum_{n_1-3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) -$ $- \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) -$ $- \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) -$ $\left. - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \right) +$ $2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+3n_2-n_1)-1} + \frac{1}{2(m_2-3n_2+n_1)-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2(m_2+3n_2+n_1)-1} - \frac{1}{2(m_2-3n_2-n_1)-1} \right).$

Фронт модуляції	Аналітичний вираз спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)}$
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{4jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(2J_0(za^*)J_{2m_2-1}(z) + \right.$ $+ J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z)J_{2n_2}(za^*) -$ $- \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z)J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z)J_{2n_2}(za^*) -$ $- \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z)J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) -$ $- \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) -$ $\left. - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) \right).$
Векторна ШІМ	
Двостороння	$C_{(m_1)(2m_2)} = 0;$ $C_{(m_1)(m_2)} = j \frac{8A}{m_1 \pi^2} \left(\frac{\pi}{6} \sin \left((m_1 + m_2(1 + 1/P)) \frac{\pi}{2} \right) \times \right.$ $\left(J_{m_2} \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(m_2 \frac{\pi}{6} \right) J_{m_2} \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right) \right) +$ $\frac{1}{m_2} \sin \left((m_1 + m_2/P) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(m_2 \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(m_2 \frac{\pi}{6} \right) \times$ $\left(J_0 \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{3\pi}{4} \right) - J_0 \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right) \right) +$ $+ \sum_{l=1, l \neq -m_2}^{\infty} \frac{1}{m_2 + l} \sin \left((m_1 + m_2/P + l) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left((m_2 + l) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left((m_2 + l) \frac{\pi}{6} \right) \times$ $\left(J_l \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \cos \left((2m_2 + 3l) \frac{\pi}{6} \right) J_l \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right) \right) +$ $+ \sum_{l=1, l \neq m_2}^{\infty} \frac{1}{m_2 - l} \sin \left((m_1 + m_2/P + l) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left((m_2 - l) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left((m_2 - l) \frac{\pi}{6} \right) \times$ $\left(J_l \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{3\pi}{4} \right) + 2 \cos \left((2m_2 - 3l) \frac{\pi}{6} \right) J_l \left(\mu(m_1 + m_2/P) \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right) \right).$

Через громіздку структуру виразів спектральних компонент для деяких модулюючих функцій, інколи вирази спектральних компонент доцільно отримувати у чисельній формі та аналізувати спектр модульованих сигналів на основі алгоритму швидкого перетворення Фур'є, адаптованого для узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

2.3. Неперервна і дискретна форма узагальненого ряду Фур'є

За умови використання складних законів модуляції значення спектральних компонент можливо розрахувати, використавши чисельні методи інтегрування, трудомісткість яких набагато більша, ніж аналітичних, тому є доцільним дослідити шляхи зменшення трудомісткості використання чисельних методів [120, 121].

У загальному випадку при дискретизації виразу узагальненого ряду Фур'є (2.4) із заданими кроками $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_M$ по кожній змінній, він перетворюється на ряд:

$$C_{(m_1)(m_2)\dots(m_M)} \approx \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \left(\sum_{k_2=1}^{\frac{2\pi V}{\Delta x_2}} \sum_{k_1=1}^{\frac{2\pi}{\Delta x_1}} \dots \sum_{k_M=1}^{\frac{2\pi}{\Delta x_M}} e^{j \sum_{i=1}^M m_i k_M \Delta x_i} \prod_{i=1}^M \Delta x_i \right). \quad (2.38)$$

Вираз для розрахунку спектральних компоненти $C_{(m_1)(m_2)\dots(m_M)}$ (2.38) складається з

$$\frac{2\pi V}{\Delta x_2} \cdot \frac{2\pi}{\Delta x_1} \dots \frac{2\pi}{\Delta x_M}, \quad (2.39)$$

сум.

Для зменшення обсягу розрахунків та забезпечення необхідної точності необхідно виконати наступні кроки:

- проінтегрувати підінтегральні вирази за максимальною кількістю змінних, тим самим мінімізувавши кількість змінних у виразі (2.4), а отже кількість точок для яких необхідно провести чисельне інтегрування для розрахунку спектральних компонент;

- дискретизувати інтеграл для розрахунку спектральних компонент, що отримано на попередньому кроці, обравши кроки інтегрування Δx_i для змінних x_i відповідно до необхідної похибки:

$$\Delta x_i = \frac{2\pi}{N_i}, \quad (2.40)$$

N_i – будь-яке натуральне число.

- використати один з відомих [122, 123] алгоритмів швидкого перетворення Фур'є для багатовимірних рядів Фур'є.

Як правило при використанні алгоритмів багатовимірної ШПФ формула для розрахунку спектра записується у векторній формі:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} x_n, \quad (2.41)$$

де x_n – n -вимірний масив даних, $n = 1..M$, значення якого сумується на основі M вкладених сум при $n / N = \{n_1/N_1, n_2/N_2, \dots, n_M/N_M\}$.

Найпоширенішим методом багатовимірної ШПФ є рядково-стовпчиковий алгоритм (англ. row-column algorithm) [124], що використовує M одновимірних ШПФ.

При використанні запропонованої методики, кількість операцій Z , необхідна для розрахунку спектральної компоненти є такою:

$$Z = N_{\Sigma} \ln N_{\Sigma}, \quad (2.42)$$

де N_{Σ} – сумарна кількість точок для розрахунку спектральних компонент, після зменшення кількості змінних, що дозволяє зменшити кількість операцій в $N_k \ln N_k$ разів, де N_k – кількість точок, в яких необхідно було б додатково проводити розрахунки без використання процедури інтегрування.

У двовимірному випадку масив даних розглядається як матриця розмірністю $n_1 \times n_2$, тому алгоритм одновимірної ШПФ спочатку використовується до усіх рядків (стовпців) з групуванням отриманих перетворених рядків (стовпців) разом як ще одну матрицю тієї ж розмірності, а потім з використанням ШПФ на кожному з стовпців (рядків) утвореної матриці та отриманням матриці кінцевих результатів.

У випадку трьох і більше змінних дані рекурсивно формуються в групи. Наприклад, тривимірне ШПФ можна отримати, використавши двовимірне ШПФ для матриці даних $n_2 \times n_3$ для кожного фіксованого значення n_1 , а потім виконати одновимірні ШПФ за змінною n_1 . Для M -вимірної випадку доцільно проводити

рекурсивний поділ даних на дві приблизно однакові групи $\{n_1 \times n_{M/2}\}$ і $\{n_{M/2+1} \times n_M\}$ [125] та використовувати до цих груп двовимірний рядково-стовпчиковий алгоритм ШПФ. Однак, як і для базового випадку, трудомісткість алгоритму складає $O(N \log N)$.

Отримана кількість математичних операцій швидкого перетворення узагальненого ряду Фур'є еквівалентна трудомісткості алгоритму в просторі однієї змінної, що свідчить про значне зменшення математичних обчислень.

Висновки до розділу 2

1. Показано, що узагальнення ряду Фур'є на довільну кількість змінних та виведення його базових властивостей дозволяє ефективно використовувати отриманий математичний апарат для розрахунку спектра струмів і напруг зі складними законами модуляції та враховувати інтергармонічні складові.

2. Встановлено, що спектральні компоненти ряду Фур'є двох змінних розширюються на довільну кількість змінних, що дозволяє спростити використання розробленого математичного апарату при описі багатопараметричних модульованих сигналів.

3. Доведено, що складні закони модуляції часто мають громіздкі аналітичні вирази спектральних компонент, тому їх доцільно представляти у чисельній формі і, для пришвидшення процедури чисельного розрахунку спектра, використовувати адаптований алгоритм швидкого перетворення Фур'є, що має трудомісткість, еквівалентну трудомісткості алгоритму у просторі однієї змінної.

РОЗДІЛ 3

РОЗШИРЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРА

У загальному випадку способи формування ШІМ у перетворювачах змінного струму розділяються на два типи [126]:

- з прямим керуванням напругою;
- зі зворотним зв'язком за струмом.

Способи реалізації ШІМ з прямим керуванням напругою забезпечують широкий діапазон регулювання, обмежують рівень динамічних втрат та амплітуди вищих гармонік. Системи зі зворотним зв'язком за струмом в свою чергу мають кращу швидкодію [127].

У більшості сучасних методів керування активними фільтрами, компенсаторами реактивної потужності, асинхронними двигунами трифазна система векторів струмів і напруг фаз перетворюється у лінійно-незалежну систему, яка нерухома у просторі. Для цього найчастіше використовуються перетворення Кларка на площину $\alpha\beta$, також можливе подальше застосування перетворення Парка для переходу на площину dq [128, 129]. У новій системі координат $\alpha\beta$ або dq вектори, що описують трифазну систему, є нерухомими, тому регулювання струмів і напруг перетворювачів у вказаних системах координат значно спрощується. При використанні цих методів виділяються вищі складові струму мережі, що спричиняють утворення реактивної потужності i_q та вищі гармоніки струму, що спричиняють пульсацію активної потужності i_p , які в подальшому використовуються як сигнали помилки у контурі керування перетворювачами [130].

Активний розвиток сучасних систем керування і регулювання параметрів трифазних мереж вимагає розробки методів формування ШІМ, що дозволяють керувати окремими гармоніками або групами гармонік несинусоїдальних струмів і напруг, що неможливе при безпосередньому використанні перетворень Кларка-Парка. Як правило, для виділення окремих гармонік у системах координат $\alpha\beta$ або dq додатково використовуються цифрові фільтри, що збільшує обсяг математичних обчислень [131-134].

За умови розробки ефективних методів розрахунку спектра та інтегральних показників якості струмів і напруг, ряди Фур'є декількох змінних можуть доповнити вже існуючі методи керування перетворювачами змінного струму, а в деяких випадках і використовуватись самостійно.

На даний момент використання ряду Фур'є має декілька обмежень, серед яких головними є:

- по-перше, узагальнений ряд Фур'є використовується лише для розрахунку модульованих сигналів, формування яких здійснюється на основі носійної функції з постійною частотою, $f_H = \text{const}$;

- по-друге, розрахунок спектральних характеристик модульованих сигналів проводиться безпосередньо на виході інвертора, а методи їх обчислення після фільтра є доволі громіздкими;

- по-третє, узагальнений ряд використовується лише для аналізу амплітуд окремих гармонік, а методики для розрахунку інтегральних показників якості електроенергії на основі узагальненого ряду відсутні, тому математичний апарат ряду Фур'є декількох змінних на даний момент використовується для найпростішого класу задач, пов'язаних з аналізом спектра модульованих сигналів [135].

Для усунення основних обмежень у використанні узагальненого ряду Фур'є доцільно розширити його можливості завдяки розробці:

- методу розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції;

- методу розрахунку струмів і напруг після фільтра на основі спільного використання рядів Фур'є однієї і декількох змінних;

- методики розрахунку інтегральних показників якості модульованих струмів і напруг на основі узагальненого ряду Фур'є,

що дозволять значно розширити можливості багатовимірних рядів Фур'є при використанні їх у системах керування та синтезі перетворювачів електроенергії на основі оцінки параметрів якості електроенергії.

3.1. Модульовані сигнали зі змінною частотою носійної функції

Для модуляції напруги імпульсних перетворювачів часто використовується ШІМ, що має постійну частоту носійної функції, через ряд переваг: простота

формування, значна спектральна відстань між гармоніками, що описують модулюючу та носійну функцію. Однак, при розробці сучасних методів керування перетворювачами, більш ефективним є використання складніших законів модуляції, що забезпечують м'яку комутацію транзисторів, менші перевантаження силових ключів у пускових режимах, поліпшення значень параметрів якості електроенергії.

Безпосереднє використання узагальненого ряду Фур'є є неможливим, через те, що при заданні аргументу носійної функції x_1 , $x_1 = \omega_1 t$, кутова частота ω_1 є функцією часу t , $\omega_1 = f(t)$. Для усунення обмеження на розрахунок спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції пропонується описувати заданий модульований сигнал рядом Фур'є двох змінних x_1 , що є аргументом носійної функції, і x_2 – модулюючої функції. Кратність модуляції P , через змінну частоту носійної функції, залежить від змінної x_2 , $P = f(x_2)$ і розраховується за формулою:

$$P(x_2) = \frac{dx_1}{dx_2}. \quad (3.1)$$

Для використання узагальненого ряду Фур'є для цього випадку необхідно перейти до нових змінних x_1^* і x_2^* , за яких кратність модуляції є постійним параметром:

$$P(x_2^*) = P^*. \quad (3.2)$$

Очевидно, що умова (3.2) виконується за постійної частоти носійної функції, тобто в новій системі координат (x_1^*, x_2^*) сигнал модулюються за законом ШІМ. Додатковою умовою для переходу до нової системи координат є незмінність коефіцієнта заповнення імпульсів γ на кожному періоді носійної функції:

$$\gamma_i = \gamma_i^*. \quad (3.3)$$

З урахуванням тотожності (3.3) при знаходженні спектральних складових $C_{(m_1)(m_2)}^*$ ряду Фур'є, інтегрування по змінній x_1 може бути виконано у просторі функцій x_1^*, x_2^* .

$$C_{(m_1)(m_2)}^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x_1^*, x_2^*) e^{j(m_1 x_1^* + m_2 x_2^*)} dx_1^* dx_2^*. \quad (3.4)$$

Після чого здійснюється зворотний перехід до початкових змінних x_1 та x_2 і розраховується спектральна складова $C_{(m1)(m2)}$. Отже, метод застосування узагальненого ряду Фур'є до модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції складається з таких кроків [136]:

- застосування перетворення змінних $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^*, x_2^*)$, для якого виконуються умови (3.2) і (3.3);
- використання узагальненого ряду Фур'є для розрахунку спектральної складової $C_{(m1)(m2)}^*$;
- застосування зворотного перетворення змінних $(x_1^*, x_2^*) \rightarrow (x_1, x_2)$ і розрахунок спектральних складових $C_{(m1)(m2)}$.

Розглянемо реалізацію кожного кроку методу докладніше.

3.1.1. Розрахунок функції перетворення змінної $x_2^* = f(x_2)$ модулюючої функції

Загальний вид функції перетворення змінної $x_2^* = f(x_2)$ модулюючої функції залежить від закону модуляції сигналу. Для ілюстрації перетворення використовується ЧІМ з постійною тривалістю паузи t_{Π} [137]. У цьому випадку момент початку нового періода ЧІМ T_i залежить від початку попереднього періода T_{i-1} :

$$T_i = T_{i-1} + \frac{y(T_{i-1})}{k} + t_{\Pi}, \quad (3.5)$$

де $y(t)$ – функція модуляції, k – тангенс кута нахилу носійної пилоподібної функції, t_{Π} – тривалість паузи.

Співвідношення між параметрами t_{Π} і k визначається через глибину модуляції μ вихідної напруги:

$$\mu = \frac{1/k}{1/k + t_{\Pi}} = \frac{1}{1 + kt_{\Pi}}. \quad (3.6)$$

Виразивши значення параметра k через t_{Π} , отримаємо:

$$k = \frac{1 - \mu}{\mu t_{\Pi}}. \quad (3.7)$$

Тоді координати нового періода ЧІМ визначаються, як:

$$T_i = T_{i-1} + y(T_{i-1})t_{\Pi}\mu / (1 - \mu) + t_{\Pi}. \quad (3.8)$$

Якщо перейти до координати $x_2 = \omega_2 \cdot t$, вираз (3.8) запишеться так:

$$x_{2(i)} = x_{2(i-1)} + y(x_{2(i-1)})x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + x_{2(\Pi)}. \quad (3.9)$$

З виразу (3.9) визначимо приріст по змінній x_2 для i -го періода ЧІМ Δx_{2i} :

$$\Delta x_{2(i)} = x_{2(i)} - x_{2(i-1)} = y(x_{2(i-1)})x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + x_{2(\Pi)}. \quad (3.10)$$

При переході до нової змінної x_2^* приріст аргументу Δx_2^* є постійним, оскільки відповідає тривалості періоду ШІМ і не залежить від фази функції модуляції $\Delta x_2^* = \text{const}$. Для визначення функціонального зв'язку між параметрами $x_{2(i)}^* = i \cdot \Delta x_2^*$ та $x_{2(i)}$ проаналізуємо формулу (3.9) для значень $i = 0, 1, 2, \dots, z$:

$$\begin{aligned} x_{2(0)} &= 0; \\ x_{2(1)} &= y(0)x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + x_{2(\Pi)}; \\ x_{2(2)} &= y(0)x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + y(x_{2(1)})x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + 2x_{2(\Pi)}; \\ x_{2(z)} &= f(y(0), y(x_{2(1)}), \dots, y(x_{2(z-1)}))x_{2(\Pi)}\mu / (1 - \mu) + zx_{2(\Pi)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

У результаті порівняння виразів (3.11) стає очевидним, що приріст аргументу Δx_2^* пропорційний тривалості паузи $x_{2(\Pi)}$:

$$x_{2(\Pi)} = c_1 \Delta x_2^*. \quad (3.12)$$

де c_1 – коефіцієнт пропорційності.

Зважаючи на формулу (3.12), рівняння (3.10) можна привести до виду:

$$\Delta x_{2(i)} = c_1 \Delta x_2^* (c_2 y(\Delta x_{2(i-1)}) + 1), \quad (3.13)$$

де $c_2 = \mu / (1 - \mu)$.

За умови, що значення Δx_2^* прямує до нуля $\Delta x_2^* \rightarrow 0$, до нуля також прямує різниця значень модулюючої функції на початку сусідніх інтервалів модуляції $(y(x_2 + \Delta x_{2(i)}) - y(x_2)) \rightarrow 0$, тому кінцевий приріст значення аргументу модулюючої функції $\Delta x_{2(i)}$ можна замінити її диференціалом dx_2 . Тоді приріст функції зміни координати кожного наступного періода ЧІМ можна виразити наступним чином:

$$dx_2 = c_1 (c_2 y(x_2) + 1) dx_2^*. \quad (3.14)$$

За умови підстановки синусоїдальної опорної функції $y(x_2) = \sin(x_2)$, отримаємо:

$$dx_2 = c_1 (c_2 \sin(x_2) + 1) dx_2^*. \quad (3.15)$$

Розділивши змінні і провівши інтегрування правої і лівої частин незалежно, отримаємо залежність $x_2^* = f(x_2)$:

$$x_2^* = 2 \arctg \left(\frac{c_2 + \operatorname{tg}(x_2 / 2)}{\sqrt{1 - c_2^2}} \right) / c_1 \sqrt{1 - c_2^2} + C, \quad (3.16)$$

де $C = -2 \arctg \left(\frac{c_2}{\sqrt{1 - c_2^2}} \right) / c_1 \sqrt{1 - c_2^2}$ – стала інтегрування, яка розраховується з умови $x_2(0) = 0$,

та зворотнє перетворення $x_2 = f(x_2^*)$:

$$x_2 = 2 \arctg \left(\sqrt{1 - c_2^2} \operatorname{tg} \left(\frac{c_1 \sqrt{1 - c_2^2}}{2} x_2^* + \arctg \left(\frac{c_2}{\sqrt{1 - c_2^2}} \right) \right) - c_2 \right). \quad (3.17)$$

Коефіцієнт пропорційності c_1 розраховується з рівняння (3.16) з урахуванням граничної умови $x_2^*(\pi) = \pi$.

$$c_1 = \frac{\pi - 2 \arctg \left(\frac{c_2}{\sqrt{1 - c_2^2}} \right)}{\pi \sqrt{1 - c_2^2}}. \quad (3.18)$$

Результат перетворення $x_2^* = f(x_2)$, застосований до ЧІМ сигналу, показано на рис. 3.1, а і б.

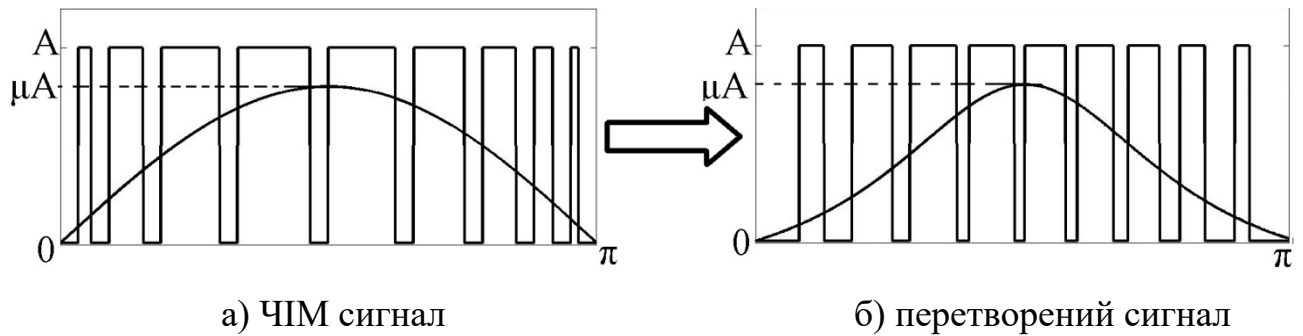


Рис. 3.1. Ілюстрація застосування перетворення $x_2^* = f(x_2)$

Перетворений сигнал, має такі особливості:

- постійну частоту носійної функції;
- імпульси модуляції знаходяться на початку кожного періоду модуляції, аналогічно до ШІМ з модуляцією заднього фронту;
- ширина імпульсу з номером i перетвореного сигналу t_i^* пропорційна ширині імпульсу відповідного імпульсу ЧІМ сигналу і розраховується за формулою:

$$t_i^* = t_i \frac{dx_2^*}{dx_2}. \quad (3.19)$$

Вказані особливості дозволяють використати узагальнений ряд Фур'є для розрахунку спектра перетвореного сигналу і на його основі отримати спектр первинного ЧІМ сигналу.

3.1.2. Адаптація ряду Фур'є двох змінних для розрахунку спектра ЧІМ

Розрахунок спектральних складових $C_{(m_1)(m_2)}^*$ для перетвореного сигналу здійснюється за такою формулою:

$$C_{(m_1)(m_2)}^* = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1^* + m_2x_2^*)} dx_1^* dx_2^*, \quad (3.20)$$

де $x_2^{*/}$ - значення змінної x_2^* на початку кожного періода модуляції, A – амплітуда модульованого сигналу.

Коефіцієнт заповнення імпульсів $\gamma(x_2^{*/})$ розраховується з використанням формули (3.10) за умови граничного переходу $\Delta x_{2(i)} \rightarrow dx_2$:

$$\gamma(x_2^{*/}) = 1 - \frac{x_{2(II)}}{y(x_2^{*/})x_{2(II)}c_2 + x_{2(II)}} = \frac{\sin(x_2^{*/})c_2}{\sin(x_2^{*/})c_2 + 1}. \quad (3.21)$$

Після підстановки виразу (3.21) у (3.20) отримаємо формулу для розрахунку спектра перетвореного модульованого сигналу:

$$C_{(m_1)(m_2)}^* = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1^* + m_2x_2^*)} dx_1^* dx_2^*. \quad (3.22)$$

Таким чином, для розрахунку спектра модульованого сигналу зі змінною частотою носійної функції, необхідно:

- у межах інтегрування по змінній x_1^* використовувати значення параметра заповнення імпульсів γ як функції від змінної $x_2^{*/}$, $\gamma(x_2^{*/})$;
- відкоригувати ширину імпульсів сигналів, використавши обернене перетворення до виразу (3.20);

– змістити імпульси модуляції перетвореного сигналу у відповідності до ЧІМ, для чого доцільно використовувати теорему зсуву одночасно по змінній $x_2^{*/}$ на кут $\varphi_y = (x_2'/(x_2^{*/}) - x_2^{*/})$ і по змінній $x_1^{*/}$ на кут $\varphi_x = P(x_2'/(x_2^{*/}) - x_2^{*/})$ [138].

У результаті застосування вказаних операцій розраховується спектральна складова $C_{(m_1)(m_2)}$ ЧІМ сигналу.

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{j(m_2 x_2 + m_1 P)(x_2(x_2^{*/}) - x_2^{*/}) \frac{dx_2}{dx_2^{*}} \Big|_{x_2^{*}=x_2^{*/}}} \times \frac{2\pi \sin(x_2(x_2^{*/}))c_2}{\sin(x_2(x_2^{*/}))c_2 + 1} \times \int_0^{2\pi} e^{j((m_1 + m_2/P)x_1^{*} + m_2 x_2^{*/})} dx_1^{*} dx_2^{*}. \quad (3.23)$$

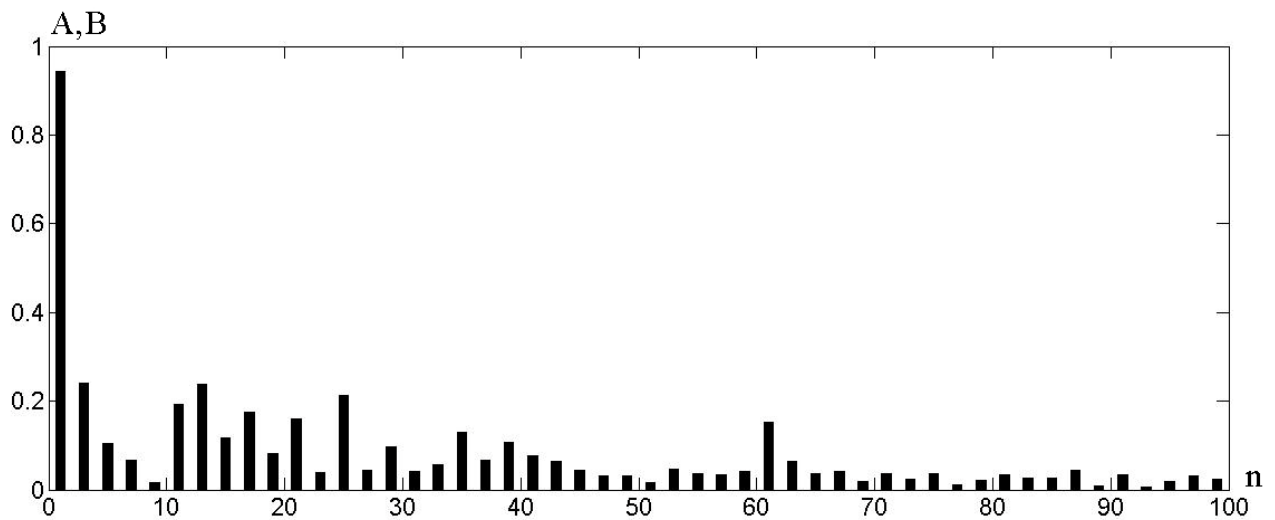
Інтегрування кратного інтегралу (3.23) по змінній x_1^{*} призведе до результату:

$$C_{mn} = \frac{A}{2\pi^2 j(m_1 + m_2/P)} \int_0^{2\pi} e^{j \frac{2\pi(m_1 + m_2/P) \sin(x_2(x_2^{*/}))c_2}{\sin(x_2(x_2^{*/}))c_2 + 1}} - 1 \times e^{j(m_2 x_2(x_2^{*/}) + m_1 P(x_2(x_2^{*/}) - x_2^{*/})) \frac{dx_2}{dx_2^{*}} \Big|_{x_2^{*}=x_2^{*/}}} dx_2^{*}. \quad (3.24)$$

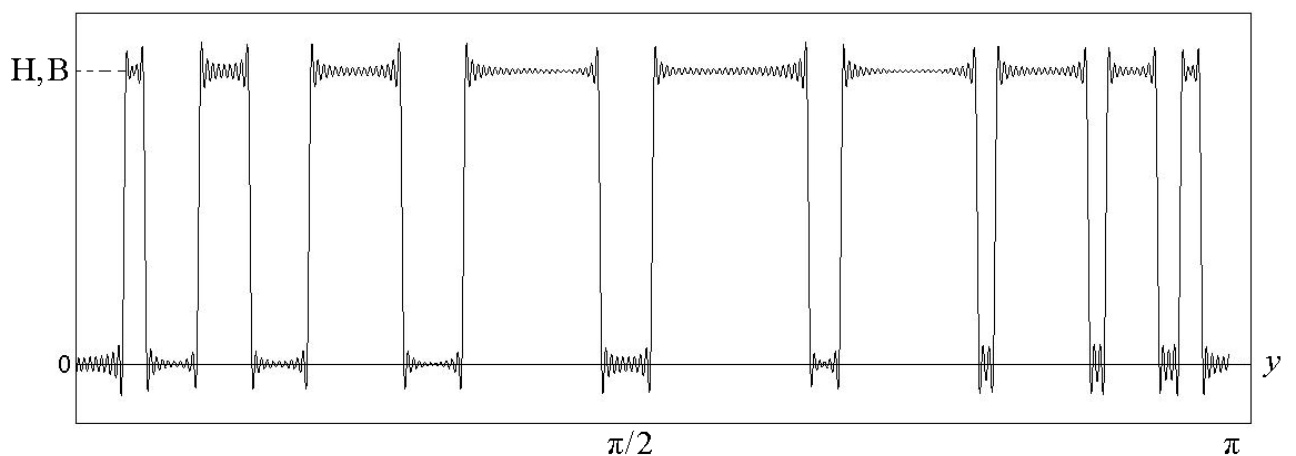
Розрахунок синусних і косинусних складових гармоніки з номером k C_k на основі спектральних складових здійснюється за допомогою наступної формули:

$$C_k = \sum_{m_1=0}^{\infty} C_{m_1(k-m_1P)}. \quad (3.25)$$

Зазвичай ряд (3.25) має швидку збіжність і для розрахунку значень гармонік достатньо використати декілька перших членів ряду. Спектр ЧІМ сигналу з амплітудою імпульсів $A = 1$ В, глибиною модуляції $\mu = 0.8$ та кратністю модуляції $P^* = 20$ показано на рис. 3.2, а, його форма, відновлена за допомогою перших 200 ненульових гармонік – на рис. 3.2, б.



а) спектр ЧІМ сигналу



б) форма сигналу відновлена за 200 першими ненульовими гармоніками

Рис. 3.2. Зображення ЧІМ сигналу а) у спектральній б) у часовій області

Згідно з рис. 3.2 можна зробити висновок, що спектр і форма відновленого сигналу відповідає заданому ЧІМ сигналу.

Отже, розрахунок спектра модульованого сигналу зі змінною частотою носійної функції із явно заданим законом модуляції з використанням узагальненого ряду Фур'є незначно ускладнюється у порівнянні з ШІМ за рахунок додавання процедури корекції ширини імпульсів модуляції та використання теореми зсуву.

3.1.3. Розрахунок спектра програмно модульованих сигналів

Окрім явного заданих законів модуляції зі змінною частотою носійної функції, на практиці використовують програмно модульовані сигнали, що мають задані спектральні властивості [139-141]. Формування таких сигналів здійснюється

на основі алгебраїчних рівнянь відносно певних гармонік їх спектра, в результаті вирішення яких розраховуються позиції переднього і заднього фронтів кожного імпульсу модуляції $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_P$ без явно заданого закону модуляції, рис. 3.3. Через це розрахунок спектра таких сигналів на основі узагальненого ряду Фур'є дещо відрізняється від модульованих сигналів із явно заданим законом модуляції.

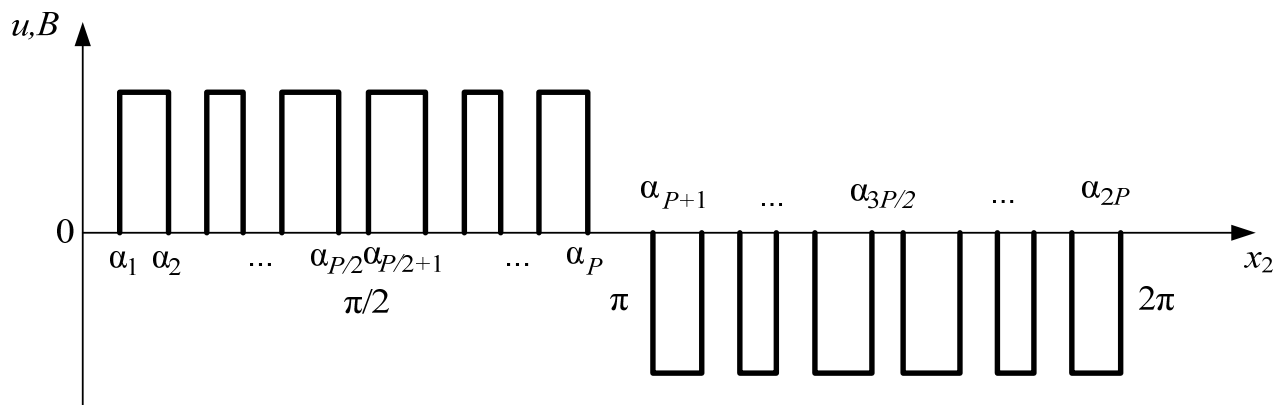


Рис. 3.3. Програмно модульований сигнал

Для програмно модульованих сигналів базовий сигнал формується на основі ШІМ-I. Загальний запис базового модульованого сигналу з двосторонньою однополярною ШІМ-I з моментом фіксації опорного значення в середині періода носійної, $\varphi_f = \pi$, отримане у попередньому розділі, має вид:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A(-1)^{m_1}}{\pi^2(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \int_0^\pi \sin(\pi \mu \sin(x_2)) \left(m_1 + \frac{2m_2 - 1}{P} \right) e^{j((2m_2-1)x_2)} dx_2. \quad (3.26)$$

Формулу для розрахунку спектральної складової $C_{(m_1)(2m_2-1)}$ для подальшого розгляду зручно описувати у виді:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A(-1)^{m_1}}{\pi^2(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \int_0^\pi \sin \left(w(x_2) \left(m_1 + \frac{(2m_2 - 1)}{P} \right) \right) e^{j((2m_2-1)s(x_2))} dx_2, \quad (3.27)$$

де $w(x_2)$ – функція, що описує ширину імпульсів модуляції,

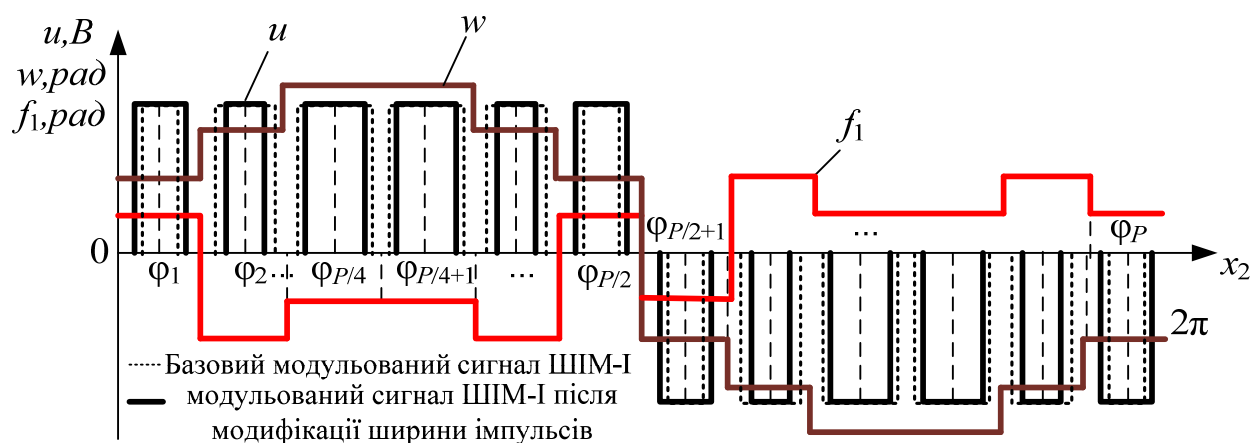
$s(x_2)$ – функція, що описує зсув імпульсів модуляції відносно початку періода.

Спектральна складова $C_{(m_1)(2m_2-1)}^*$ програмно модульованого сигналу отримується з базового (3.27) шляхом варіації функцій $w(x_2)$ і $s(x_2)$ згідно з бажаним видом спектральної характеристики і може бути записана у виді:

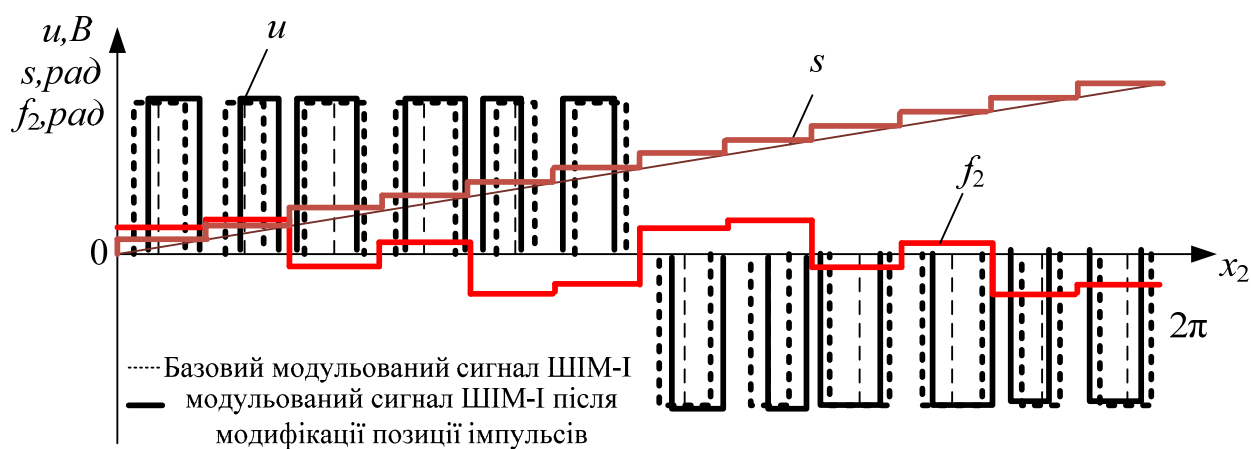
$$C_{(m_1)(2m_2-1)}^* = f(C_{(m_1)(2m_2-1)}, w(x_2) + f_1(x_2), s(x_2) + f_2(x_2)), \quad (3.28)$$

де $f_1(x_2)$, $f_2(x_2)$ – функції, що пов’язують ширину і позицію імпульсів програмно модульованого і базового сигналів.

На рис. 3.4, а і б продемонстровано покроковий перехід від базового до програмно модульованого сигналу. На рис. 3.4, а – застосування функції $f_1(x_2)$ корекції ширини імпульсів, на рис. 3.4, б – функції $f_2(x_2)$ корекції позиції імпульсів.



а)



б)

Рис. 3.4. Принцип формування програмно модульованого сигналу на основі базового з ШІМ-I: а) після корекції ширини імпульсів; б) після корекції позиції імпульсів

На рис. 3.4, а зображено базовий модульований сигнал з ШІМ-I з шириною імпульсів, що задається функцією $w(x_2)$ та програмно модульований сигнал після

корекції ширини імпульсів на основі функції $f_1(x_2)$. На інтервалі $x_2 \in [0;\pi)$ ширині імпульсу відповідає абсолютне значення функції $w(x_2)$, а на інтервалі $x_2 \in [\pi;2\pi)$ – протилежне за знаком. Якщо значення функції $f_1(x_2)$ на даному періоді ШІМ має протилежний знак відносно функції $w(x_2)$, ширина імпульсу програмно модульованого сигналу на цьому періоді стає меншою, якщо такий же – більшою. На рис 3.4, б показана зміна позиції імпульсів після використання функції $f_2(x_2)$. Якщо функція $f_2(x_2)$ має додатне значення на певному періоді ШІМ, імпульс зсувається на відповідне значення в кінець періода, від’ємне – на початок періода.

Очевидно, що функції $f_1(x_2)$ і $f_2(x_2)$ мають період кратний періоду модулюючої функції, тому їх доцільно описувати через ряд Фур’є. Розглянемо властивості функції f_1 , яка загалом може бути описана рядом Фур’є однієї змінної:

$$f_1(x_2) = a_0 + \sum_{c=1}^{l_1} a_{c1} \cos(cx_2) + b_{c1} \sin(cx_2), \quad (3.29)$$

де a_{c1}, b_{c1} – постійні коефіцієнти, l_1 – кількість гармонік ряду.

Функція $f_1(x_2)$ задає зміну ширини імпульсу програмно модульованого сигналу відносно базового, тому за умови використання синусоїдальної модулюючої функції на неї накладаються обмеження:

$$f_1(x_2) = f_1(\pi - x_2), f_1(0) = f_1(\pi) = 0. \quad (3.30)$$

Зважаючи на обмеження (3.30), функція $f_1(x_2)$ містить лише непарні гармоніки:

$$f_1(x_2) = \sum_{c=1}^{l_1} b_{c1} \sin((2c-1)x_2). \quad (3.31)$$

Функція $f_2(x_2)$ описує зміщення імпульсів програмно модульованого сигналу відносно базового, тому має такі властивості:

$$f_2(x_2) = -f_2(\pi - x_2), f_2(0) = f_2(\pi) = 0. \quad (3.32)$$

і у її розкладі присутні лише парні гармоніки:

$$f_2(x_2) = \sum_{c=1}^{l_2} b_{c2} \sin(2cx_2). \quad (3.33)$$

Отже загальний запис програмно модульованого сигналу відносно базового має вид:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A(-1)^{m_1}}{\pi^2(m_1 + (2m_2 - 1)/P)} \times \int_0^\pi \sin \left(\pi \left(\mu \sin(x_2) + \sum_{c=1}^{l_1} b_{c1} \sin((2c-1)x_2) \right) \left(m_1 + \frac{(2m_2-1)}{P} \right) \right) \times e^{j(2m_2-1)x_2} e^{j((m_1P+2m_2-1)\sum_{c=1}^{l_2} b_{c2} \sin(2cx_2))} dx_2. \quad (3.34)$$

Для подальшого розрахунку спектра спектральні компоненти $C_{(m_1)(2m_2-1)}$ зручно привести до виду $C_{(m_1)(2k-1-m_1P)}$.

$$C_{(m_1)(2k-1-m_1P)} = \frac{2AP(-1)^{m_1}}{\pi^2(2k-1)} \times \int_0^\pi \sin \left(\pi \left(\mu \sin(x_2) + \sum_{c=1}^{l_1} b_{c1} \sin((2c-1)x_2) \right) \frac{2k-1}{P} \right) \times e^{j(2k-1-m_1P)x_2} e^{j((2k-1)\sum_{c=1}^{l_2} b_{c2} \sin(2cx_2))} dx_2, \quad (3.35)$$

та розраховувати інтеграл у діапазоні $[0, \pi/2]$:

$$C_{(m_1)(2k-1-m_1P)} = \frac{4jAP(-1)^{m_1}}{\pi^2(2k-1)} \times \int_0^{\pi/2} \sin \left(\pi \left(\mu \sin(x_2) + \sum_{c=1}^{l_1} b_{c1} \sin((2c-1)x_2) \right) \frac{2k-1}{P} \right) \times \sin \left((2k-1-m_1P)x_2 + (2k-1)\sum_{c=1}^{l_2} b_{c2} \sin(2cx_2) \right) dx_2. \quad (3.36)$$

Згідно з формулою (2.5) значення гармоніки з номером $2k-1$, C_{2k-1} дорівнює:

$$C_{2k-1} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{4jAP(-1)^{m_1}}{\pi^2(2k-1)} \times \int_0^{\pi/2} \sin \left(\pi \left(\mu \sin(x_2) + \sum_{c=1}^{l_1} b_{c1} \sin((2c-1)x_2) \right) \frac{2k-1}{P} \right) \times \sin \left((2k-1-m_1P)x_2 + (2k-1)\sum_{c=1}^{l_2} b_{c2} \sin(2cx_2) \right) dx_2. \quad (3.37)$$

Загалом, метод розрахунку спектра програмно модульованого сигналу відрізняється від загальної методики лише принципом переходу від базового до заданого сигналу, що здійснюється на основі ряду Фур'є однієї змінної. За необхідності використання узагальненого ряду з трьома або більше змінними для

опису модульованого сигналу зі змінною частотою носійної функції, подібні перетворення робляться аналогічно і незалежно для кожної змінної.

Тому, методика розрахунку складається з наступних кроків:

- формування базового модульованого сигналу ШІМ-I в просторі узагальненого ряду Фур'є.
- розрахунок коефіцієнтів b_{c1} , b_{c2} програмно модульованого сигналу;
- підстановка значень коефіцієнтів у формулу для розрахунку спектра (3.37).

3.2. Спектр струмів і напруг на виході фільтра

Узагальнений ряд Фур'є, в основному, використовується для розрахунку спектра безпосередньо на виході інвертора, тоді як більш інформативним є спектр напруги після фільтра. Безпосереднє визначення реакції фільтра за складовими узагальненого ряду є трудомістким, однак спрощується за умови спільного використання узагальненого ряду з рядом Фур'є однієї змінної на основі метода накладання для дискретно-лінійних ланцюгів [142, 143], що дає змогу описати квазіусталену напругу (струм) на виході фільтра u_{Σ} при дії на нього модульованого сигналу, як суперпозицію напруг u_i (струмів i_i), утворених як реакція фільтра на кожний імпульс напруги.

$$u_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^P u_{i(k)}(x_2), \quad (3.38)$$

де P – кратність модуляції, k – номер імпульсу напруги.

Реакція фільтра на кожний імпульс описується через дві складові:

- на інтервалі тривалості імпульсу з номером k (T_k , $T_k + t_k$), напруга на виході фільтра $u_{i(k)}$ знаходиться через інтеграл Дюамеля [143]:

$$u_{i(k)}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} V(\tau) d\tau, \quad (3.39)$$

де e^A – матрична експонента електричного ланцюга [144], V – зовнішня дія. У випадку модуляції прямокутними імпульсами з амплітудою U_m формула (3.39) спроститься до виду:

$$u_{i(k)}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot U_m d\tau = U_m e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau = (I - e^{At}) \cdot U_{ВИМ}, \quad (3.40)$$

де I – одинична матриця, $U_{ВИМ}$ – вимушене значення напруги.

- на інтервалі, що триває після закінчення імпульсу до кінця періоду модульованого сигналу ($T_k + t_k, \Theta$) у колі протікає вільний процес $u_{BЛ}$, що описується виразом:

$$u_{BЛ}(t) = u_{0(k)} e^{A(t - (T_k + t_k))}, \quad (3.41)$$

де $u_{0(k)}$ – значення напруги у момент закінчення імпульсу $T_k + t_k$:

$$u_{0(k)}(t) = u_{i(k)}(T_k + t_k). \quad (3.42)$$

Використання формул (3.39)-(3.42) дає можливість розрахувати напругу на виході фільтра як суперпозицію реакцій на кожний імпульс. Метод розрахунку відрізняється для модульованих напруг першого роду, коли наперед задані координати переднього і заднього фронтів імпульсів, та другого роду, коли ця інформація невідома. Розглянемо два випадки окремо.

3.2.1. Спектр напруги на виході фільтра при модуляції першого роду

При модуляції першого роду напругу на виході фільтра, рис. 3.5, а, представлену як суперпозицію реакцій на кожний імпульс за формулами (3.39)-(3.42), рис. 3.5, б, доцільно розкласти на перехідні складові, що відповідають часовим інтервалам тривалості імпульсів, рис. 3.5, в та вільні складові рис. 3.5, г.

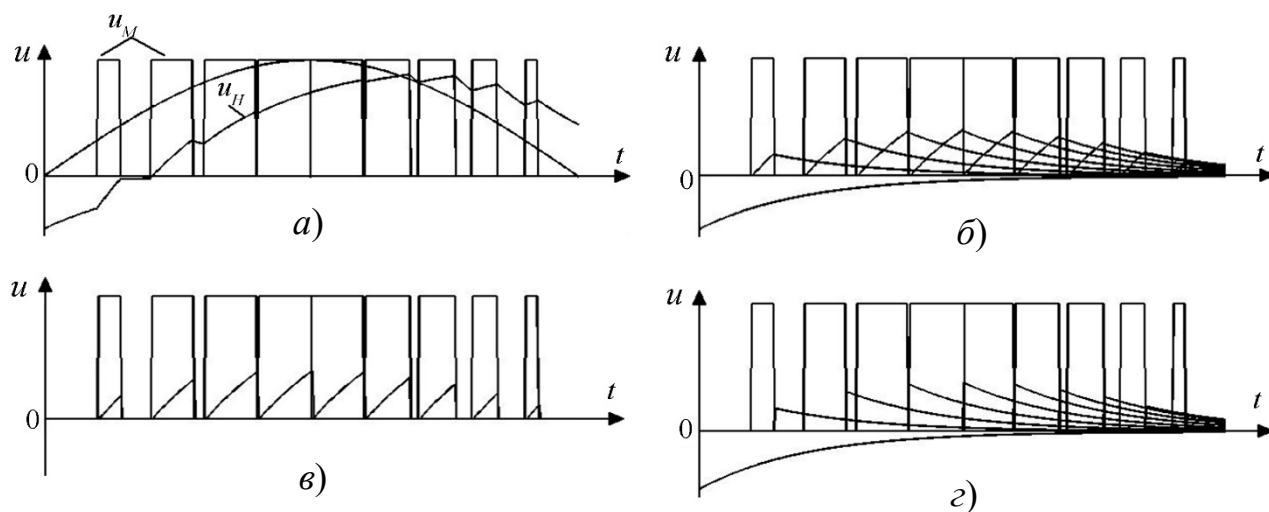


Рис. 3.5. Графічна ілюстрація використання принципу накладання і розділення реакцій на складові: а) модульована напруга до та після фільтра; б) використання принципу накладання для опису перехідного процесу; в) перехідні складові, що відповідають часовим інтервалам тривалості імпульсів; г) вільні складові

Спектр складових, що відповідають інтервалам тривалості імпульсів, зручно розраховувати з використанням ряду Фур'є двох змінних, а вільних складових – рядом Фур'є однієї змінної. Метод розрахунку спектра на виході фільтра на основі сумісного використання рядів Фур'є однієї і двох змінних складається з таких етапів [145]:

1. Опис напруги на виході фільтра через перехідну (3.40) і вільну (3.41) складові.

2. Визначення положення переднього і заднього фронтів модульованих імпульсів напруги, рис. 3.3, а.

3. Якщо носійна функція модульованого сигналу має змінну частоту носійної функції, формування базового ШІМ сигналу з модуляцією першого роду.

4. Розрахунок спектра перехідних складових, рис. 3.3, в, за допомогою ряду Фур'є двох змінних.

5. Перехід від базового модульованого сигналу з ШІМ, до модульованого сигналу із заданою носійною функцією.

6. Розрахунок спектра вільних складових, рис. 3.3, г, за допомогою ряду Фур'є однієї змінної.

7. Визначення сумарної спектральної характеристики напруги на виході фільтра як суми спектральних характеристик, отриманих на основі рядів однієї і двох змінних.

Слід зазначити, що у випадку аналізу ШІМ сигналів, п. 3 і 5 виконувати не потрібно.

Розглянемо особливості використання методу на прикладі базової схеми мостового інвертора напруги, зображеного на рис. 3.6, а. Напруга інвертора модулюється за законом однополярної ШІМ з двосторонньою модуляцією при ввімкненні на його виході L -фільтра, навантаженого активним навантаженням з опором R . При цьому пункти 3 і 5 методу розрахунку спектра на виході фільтра виконувати не потрібно, оскільки використовується модуляція типу ШІМ. Інвертор живиться від джерела з постійною напругою E . Для аналізу інвертор заміняється ідеальною дискретно-лінійною схемою заміщення без втрат, рис. 3.6, б. На інтервалі замкненого, рис. 3.6, в, і розімкненого стану ключових елементів, рис. 3.6,

γ , параметри схеми заміщення перетворювача є тотожними, стала часу фільтра $\tau = L/R$.

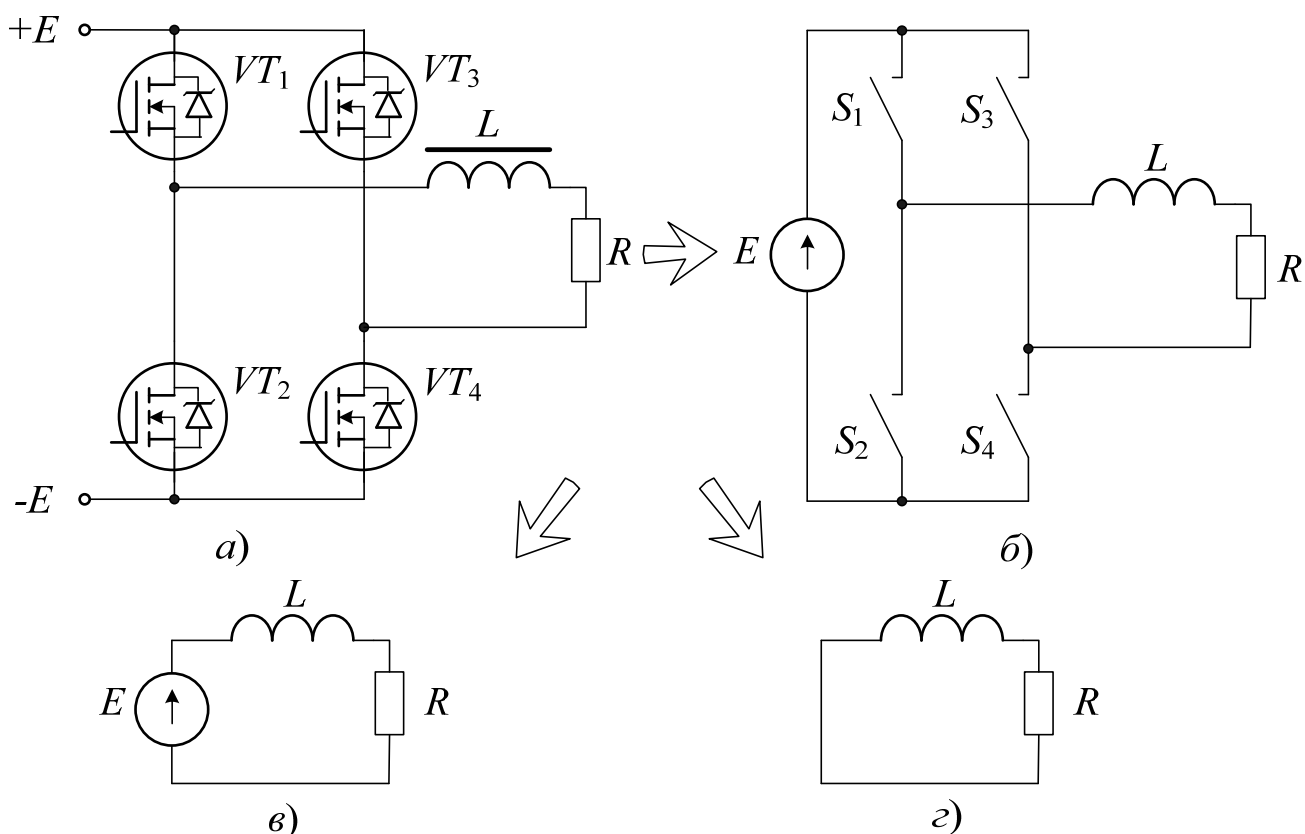


Рис. 3.6. Інвертор напруги: а) принципова схема силової частини інвертора; б) ідеальна дискретно-лінійна схема заміщення інвертора; в) лінійна схема заміщення інвертора на інтервалі замкненого стану ключових елементів; г) лінійна схема заміщення інвертора на інтервалі розімкненого стану ключових елементів

Вибір базової схеми мостового інвертора зроблено з метою спрощення аналізу режимів його роботи та привернення основної уваги до особливостей розрахунку спектра напруги після фільтра. Розрахунок спектра починається з розкладу напруги на перехідну і вільну складові.

1. Опис напруги на виході фільтра через перехідну і вільну складові

Сумарна реакцію фільтра на широтно-модульовану напругу $u_M(x_2)$ описується відповідно до формули (3.38). Перехідна складова $u_{\text{ПЕР}(k)}$ імпульсу k описується формулою:

$$u_{ПЕР(k)}(x_2) = E(1 - e^{-(x_2 - x_{2П(k)})/(\omega_M \tau)}), x_{2П(k)} \leq x_2 \leq x_{2З(k)}, \quad (3.43)$$

а вільна $u_{ВІЛ(k)}$ наступною:

$$u_{ВІЛ(k)}(x_2) = u_{ПЕР(k)}(x_{2(k)})e^{-(x_2 - x_{2З(k)})/(\omega_M \tau)}, x_{2З(k)} \leq x_2 \leq \pi, \quad (3.44)$$

де ω_M – кутова частота модулюючої функції, $x_{2П(k)}$ – координата переднього фронту імпульсу k , $x_{2З(k)}$ – координата заднього фронту імпульсу k .

2. Визначення положення переднього і заднього фронтів модульованого сигналу

Координати переднього $x_{2П(k)}$ і заднього $x_{2З(k)}$ фронтів імпульсів модуляції для знаходження перехідних складових задаються як межі інтегрування інтегралу за змінною x_2 в узагальненому ряді Фур'є двох змінних для ШІМ-I, що описана у розділі 2.

При розрахунку вільних складових положення переднього $x_{2П(k)}$ і заднього $x_{2З(k)}$ фронтів імпульсів розраховуються явно і відповідно дорівнюють:

$$x_{2П(k)} = k\Delta x_2 + (\Delta x_2 / 2)(1 - \mu \sin(k\Delta x_2)); \quad (3.45)$$

$$x_{2З(k)} = k\Delta x_2 + (\Delta x_2 / 2)(1 + \mu \sin(k\Delta x_2)), \quad (3.46)$$

де Δx_2 – кут, що відповідає одному періоду ШІМ.

3. Формування базового ШІМ сигналу з модуляцією першого роду

Цей пункт розрахунку пропускається, оскільки досліджуваний ШІМ сигнал має постійну частоту носійної функції.

4. Розрахунок спектра перехідних складових за допомогою ряду Фур'є двох змінних

Підінтегральний вираз для розрахунку спектра перехідної складової визначається з формули (3.41) і дорівнює:

$$y(x_1) = E(1 - e^{-x_1/(\omega_H \tau)}), \quad (3.47)$$

де ω_H – частота носійної функції.

Підставляючи аналітичний вираз перехідних складових напруги в формулу узагальненого ряду Фур'є, отримаємо:

$$C_{ПЕР(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} \left(1 - e^{-\frac{x_1}{\tau\omega_H}} \right) e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} \left(1 - e^{-\frac{x_1}{\tau\omega_H}} \right) e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 \right). \quad (3.48)$$

Розділимо інтеграл на дві частини $C_{ПЕР1(m_1)(m_2)}$ і $C_{ПЕР2(m_1)(m_2)}$:

$$C_{ПЕР1(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 \right); \quad (3.49)$$

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{-\frac{x_1}{\tau\omega_H}} e^{j\left(\left(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)x_1 + m_2x_2\right)} dx_1 dx_2 \right). \quad (3.50)$$

Складова $C_{ПЕР1(m_1)(m_2)}$ описує спектр модульованого сигналу без фільтра і розрахована в попередньому розділі:

$$C_{ПЕР1(m_1)(2m_2-1)} = \\ = \frac{2j(-1)^{m_1} E}{(m_1 + (2m_2 - 1)\omega_M / \omega_H)\pi} J_{2m_2-1}(\pi(m_1 + (2m_2 - 1)\omega_M / \omega_H)\mu). \quad (3.51)$$

Для спрощення другої складової $C_{ПЕР2(m_1)(m_2)}$ проінтегруємо її за змінною x_1 :

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{Ee^{-\frac{\pi}{\tau\omega_H} + j\pi(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H})}}{2\pi^2(j(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}) - \frac{1}{\tau\omega_H})} \int_0^\pi \left(e^{-\frac{\mu\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j\left(\mu\sin(x_2)(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}) + m_2x_2\right)} - \right. \\ \left. -e^{-\frac{\mu\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j\left(-\mu\sin(x_2)(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}) + m_2x_2\right)} \right) dx_2 - \int_\pi^{2\pi} \left(e^{-\frac{\mu\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j\left(-\mu\sin(x_2)(m_1 + m_2\omega_M/\omega_H) + m_2x_2\right)} - \right. \\ \left. -e^{-\frac{\mu\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j\left(\mu\sin(x_2)(m_1 + m_2\omega_M/\omega_H) + m_2x_2\right)} \right) dx_2. \quad (3.52)$$

Після розділення інтегралу (3.52) по чвертям періода і застосування підстановки $x_2 = z$, $x_2 = \pi - z$, $x_2 = \pi + z$, $x_2 = 2\pi - z$, для першої, другої, третьої і четвертої чверті відповідно, отримаємо:

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{Ee^{-\frac{\pi}{\tau\omega} + j\pi(m_1 + m_2\omega_M/\omega_H)}}{2\pi^2(j(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}) - \frac{1}{\tau\omega_H})} \times \\ \int_0^{\pi/2} \left(e^{j\left(\mu\sin(z)(m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H})\right)} - e^{j\left(-\mu\sin(z)m_1 + \frac{m_2\omega_M}{\omega_H}\right)} \right) \times \\ \left(e^{jm_2z} + e^{jm_2(\pi-z)} - e^{jm_2(\pi+z)} - e^{jm_2(2\pi-z)} \right) e^{-\frac{\mu\sin(z)}{\tau\omega_H}} dz. \quad (3.53)$$

З аналізу виразу (3.53), можна зробити висновок, що для парних m_2 коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{ПЕР(m_1)(2m_2)} = 0$. Для непарних m_2 інтеграл виразу (3.53) має вид:

$$C_{ПЕР2(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2E(-1)^{m_1} e^{-\frac{\pi}{\tau\omega_H} + \frac{j\pi(2m_2-1)\omega_M}{\omega_H}}}{\pi(j(m_1 + \frac{(2m_2-1)\omega_M}{\omega_H}) - \frac{1}{\tau\omega_H})} \times \\ J_{(2m_2-1)} \left(\mu \left(m_1 + \frac{(2m_2-1)\omega_M}{\omega_H} \right) + \frac{j}{\tau\omega_H} \right). \quad (3.54)$$

Для розрахунку амплітуди гармоніки перехідної складової з номером k $C_{ПЕР(k)}$ через значення спектральних складових $C_{(m_1)(m_2)}$ використовують таку формулу:

$$C_{ПЕР(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{ПЕР1(m_1)(k-m_1P)} + C_{ПЕР2(m_1)(k-m_1P)}. \quad (3.55)$$

5. Перехід від базового модульованого сигналу, до модульованого сигналу із заданою носійною функцією

Цей пункт розрахунку в даному випадку пропускається, оскільки спектр перехідної складової, отриманий в формулі (3.55), відповідає шуканому, бо заданий сигнал модульований за законом ШІМ.

6. Розрахунок спектра вільних складових за допомогою ряду Фур'є однієї змінної.

Початкові умови вільної складової розраховують у момент завершення імпульсу:

$$u_{0(k)} = E \left(1 - e^{-m_{2(k)}/(\omega_M \tau)} \right) = E \left(1 - e^{-\Delta x_2 \mu \sin(k \Delta x_2)/(\omega_M \tau)} \right), \quad (3.56)$$

зважаючи на це спектр вільної складової дорівнює:

$$C_{ВІЛ(k)} = \frac{1}{2\pi} \left(u_0 \int_0^{2\pi} e^{-x_2/(\Omega \tau)} e^{-jkx_2} dx_2 + \sum_{i=0}^{P-1} u_{0(k)} \int_{x_{2(3i)}}^{2\pi} e^{-x_2/(\Omega \tau)} e^{-jkx_2} dx_2 \right). \quad (3.57)$$

7. Визначення сумарної спектральної характеристики

Значення і фазовий зсув гармоніки k модульованого сигналу ШІМ-I на виході фільтру розраховують на основі суми спектрів вільної і перехідної складової:

$$C_{(k)} = C_{ПЕР(k)} + C_{ВІЛ(k)}. \quad (3.58)$$

Загалом для розрахунку спектральної характеристики відфільтрованого модульованого сигналу необхідно обчислити суми декількох рядів функцій Бесселя, які мають достатньо швидку збіжність, тому для розрахунку кожної гармоніки необхідно використати лише декілька перших членів суми ряду.

3.2.2. Спектр напруги на виході фільтра при модуляції другого роду

Положення імпульсів модуляції другого роду розраховують у результаті вирішення трансцендентного рівняння, тому значення переднього і заднього фронту імпульсів можуть бути обчислені тільки наближено. Однак, за умови використання узагальненого ряду Фур'є, положення імпульсів задається у межах інтегрування і може бути обчислене точно. Тому, окрім перехідної, узагальнений

ряд Фур'є доцільно використовувати для розрахунку вільної складової. В усьому іншому алгоритм розрахунку спектра напруги з ШІМ-II є аналогічним ШІМ-I. Нижче наведено алгоритм для розрахунку перехідної і вільної складової.

1. Опис напруги на виході фільтра

Опис напруги на виході фільтра є аналогічним випадку ШІМ-I з використанням формул (3.43) і (3.44).

2. Розрахунок положення імпульсів модуляції перехідних складових

Положення переднього $x_{2П(k)}$ і заднього $x_{2З(k)}$ фронтів імпульсів ШІМ-II визначається точками перетину модулюючої функції і пилкоподібної напруги відповідно до табл. 2.2.

3. Формування базового ШІМ сигналу

Цей пункт розрахунку пропускається, оскільки досліджуваний ШІМ сигнал має постійну частоту носійної функції.

4. Розрахунок спектра перехідних складових

Підставляючи аналітичний вираз імпульсів напруги, які описуються виразом (3.47), в формулу для розрахунку спектра сигналу ШІМ-II, отримаємо:

$$C_{ПЕР(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} (1 - e^{-x_1/\tau\omega_H}) e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} (1 - e^{-x_1/\tau\omega_H}) e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (3.59)$$

Розділимо інтеграл на дві частини $C_{ПЕР1(m_1)(m_2)}$ і $C_{ПЕР2(m_1)(m_2)}$:

$$C_{ПЕР1(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right); \quad (3.60)$$

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{E}{2\pi^2} \times \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (3.61)$$

Складові $C_{ПЕР1(m_1)(m_2)}$ описує спектр модульованого сигналу без фільтра:

$$C_{ПЕР1(m_1)(2m_2-1)} = j \frac{(-1)^{m_1} 2E}{m_1 \pi} J_{2m_2-1}(\pi m_1 \mu). \quad (3.62)$$

Для спрощення виразу другої складової $C_{ПЕР2(m_1)(m_2)}$, проінтегруємо вираз (3.61) за змінною x_1 :

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega_H} + j\pi m_1}}{2\pi^2(jm_1 - 1/\tau\omega_H)} \times$$

$$\times \int_0^\pi \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j(\mu\pi\sin(x_2)m_1 + m_2x_2)} - e^{\frac{\mu\pi\sin(y)}{\tau\omega_H}} e^{j(-\mu\pi\sin(x_2)m_1 + m_2x_2)} \right) dx_2 - \quad (3.63)$$

$$- \int_\pi^{2\pi} \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j(-\mu\pi\sin(x_2)m_1 + m_2x_2)} - e^{\frac{\mu\pi\sin(x_2)}{\tau\omega_H}} e^{j(\mu\pi\sin(x_2)m_1 + m_2x_2)} \right) dx_2.$$

Розбиваючи їх по чвертям періода і застосовуючи підстановки $x_2 = z$, $x_2 = \pi - z$, $x_2 = \pi + z$, $x_2 = 2\pi - z$, для першої, другої, третьої і четвертої чверті відповідно, отримаємо:

$$C_{ПЕР2(m_1)(m_2)} = -\frac{E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega_H} + j\pi m_1}}{2\pi^2(jm_1 - 1/\tau\omega_H)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \left(e^{\frac{\mu\pi\sin(z)}{\tau\omega_H}} e^{j(\mu\pi\sin(z)m_1)} \left(e^{jm_2z} + e^{jm_2(\pi-z)} - e^{jm_2(\pi+z)} - e^{jm_2(2\pi-z)} \right) - \quad (3.64)$$

$$- e^{\frac{\mu\pi\sin(z)}{\tau\omega_H}} e^{j(-\mu\pi\sin(z)m_1)} \left(e^{jm_2z} + e^{jm_2(\pi-z)} - e^{jm_2(\pi+z)} - e^{jm_2(2\pi-z)} \right) \right) dz.$$

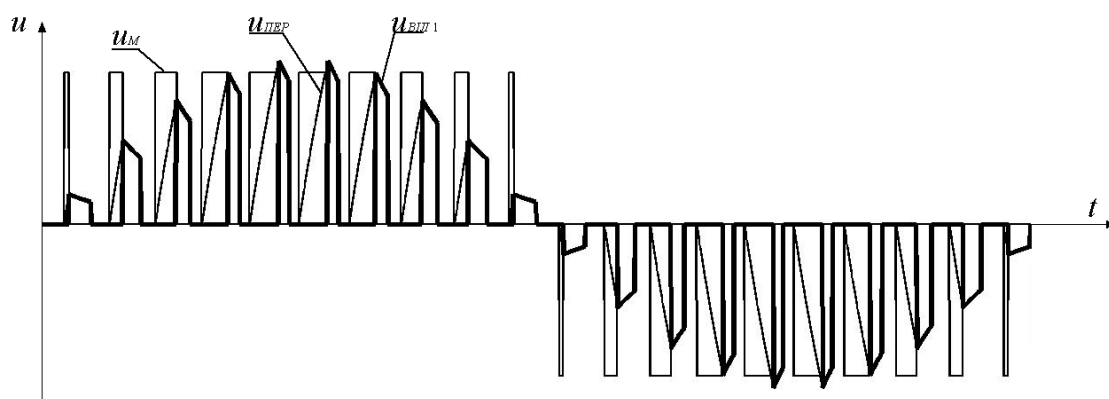
Для парних m_2 коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{ПЕР2(m_1)(2m_2)} = 0$. Для непарних – розраховуються за формулою:

$$C_{ПЕР2(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2j(-1)^{m_1} E e^{-\frac{\pi}{\tau\omega_H}}}{\pi(jm_1 - 1/\tau\omega_H)} J_{(2m_2-1)}(\mu\pi(m_1 + j/\tau\omega_H)). \quad (3.65)$$

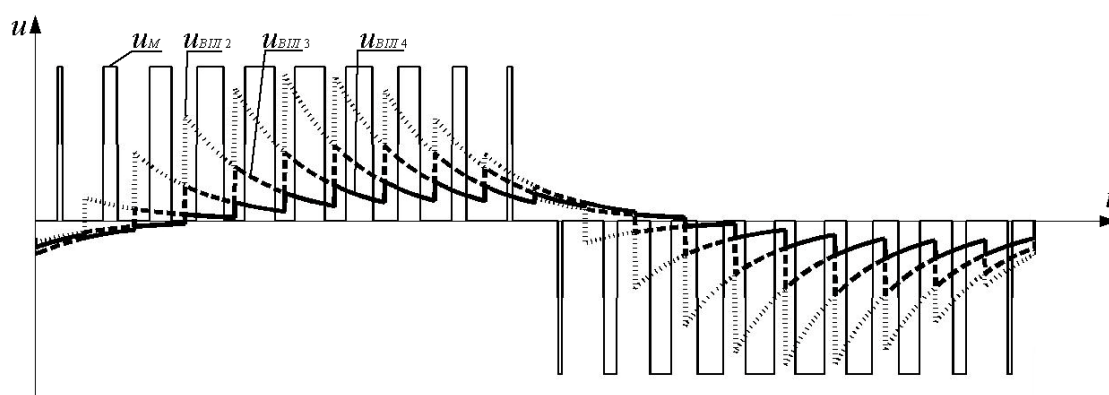
5. Розрахунок положення імпульсів модуляції вільних складових

Для розрахунку спектра вільних складових за допомогою узагальненого ряду Фур'є їх необхідно розділити на компоненти, які змінюються з частотою носійної функції ω_H . Графічні ілюстрації одного з варіантів розділення вільних складових

для подальшого розрахунку їх спектра узагальненим рядом Фур'є показано на рис. 3.7, а і б.



а)



б)

Рис. 3.7. Графічна ілюстрація до розділення вільної складової на компоненти, які змінюються з частотою носійної функції: а) з виділеною вільною компонентою $u_{ВЛ1}$; б) з компонентами $u_{ВЛ2}$, $u_{ВЛ3}$, $u_{ВЛ4}$.

Компонента $u_{ВЛ1}$, зображена на рис. 3.5, а, описує ділянки вільних складових на інтервалах між заднім фронтом імпульсу ШІМ, від якого утворена вільна складова, і кінцем даного періоду ШІМ: $k \cdot T + x_{23(k)} \cdot (k+1)T$. Компонента $u_{ВЛd}$, де $d = 2 \cdot (0.5P + 1)$ описує ділянки вільних складових напруги на періодах ШІМ, які зміщені на $(d-1)$ період відносно імпульсу, з якого починається вільна складова.

Передній фронт компоненти $u_{ВЛ1}$ на періоді ШІМ співпадає із заднім фронтом імпульсу, тому задній фронт складової $u_{ВЛ1}$ рівний 2π . Для інших компонент передній фронт співпадає із початком періода, а задній фронт – з кінцем періода.

6. Розрахунок спектра вільних складових

Розрахуємо спектр компонент вільної складової. Спектр компоненти u_{BLI1} розраховують за формулою:

$$C_{BLI1(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi u_{01}(x_2) \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 + \right. \\ \left. + \int_\pi^{2\pi} u_{01}(x_2) \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (3.66)$$

де $u_{01}(x_2) = E(1 - e^{-x_{2(k)}}) = E(1 - e^{-2\pi\mu\sin(x_2)})$ - початкові умови вільної складової імпульсу модуляції з номером k .

Після підстановки у формулу (3.66) початкових умов, отримаємо:

$$C_{BLI1(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2(jm_1 - 1 / (\tau\omega_H))} \left(\int_0^\pi (1 - e^{-2\pi\mu\sin(x_2)}) \times \right. \\ \left(e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega_H}} e^{j(2\pi m_1 + m_2 x_2)} - e^{\frac{-\pi(1+\mu\sin(x_2))}{\tau\omega_H}} e^{j(\pi(1+\mu\sin(x_2))m_1 + m_2 x_2)} \right) dx_2 - \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} (1 - e^{2\pi\mu\sin(x_2)}) \left(e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega_H}} e^{j(2\pi m_1 + m_2 x_2)} - e^{\frac{-\pi(1-\mu\sin(x_2))}{\tau\omega_H}} e^{j(\pi(1-\mu\sin(x_2))m_1 + m_2 x_2)} \right) dx_2 \right). \quad (3.67)$$

Розіб'ємо інтеграли формули (3.67) на дві складові $C_{BLI1_1(m_1)(m_2)}$ і $C_{BLI1_2(m_1)(m_2)}$:

$$C_{BLI1_1(m_1)(m_2)} = \frac{E}{2\pi^2(jm_1 - 1 / (\tau\omega_H))} \times \\ \times \left(\int_0^\pi e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega_H}} e^{j(2\pi m_1 + m_2 x_2)} dx_2 - \int_\pi^{2\pi} e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega_H}} e^{j(2\pi m_1 + m_2 x_2)} dx_2 \right); \quad (3.68)$$

$$C_{BLI1_2(m_1)(m_2)} = -\frac{E}{2\pi^2(jm_1 - 1 / (\tau\omega_H))} \times \\ \left(\int_0^\pi e^{\frac{-\pi(1+\mu\sin(x_2))}{\tau\omega_H}} e^{j(\pi(1+\mu\sin(x_2))m_1 + m_2 x_2)} dx_2 - \int_\pi^{2\pi} e^{\frac{-\pi(1-\mu\sin(x_2))}{\tau\omega_H}} e^{j(\pi(1-\mu\sin(x_2))m_1 + m_2 x_2)} dx_2 \right). \quad (3.69)$$

Складові $C_{BLI1_1(m_1)(m_2)}$ розраховується наступним чином:

$$C_{BIL1_1(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2e^{\frac{-2\pi}{\tau\omega_H} E}}{\pi^2(jm_1 - 1 / (\tau\omega_H))(2m_2 - 1)}, \quad (3.70)$$

а складова $C_{BIL1_2(m_1)(m_2)}$ за такою формулою:

$$\begin{aligned} C_{BIL1_2(m_1)(2m_2-1)} &= -\frac{e^{\frac{-\pi}{\tau\omega_H} (-1)^{m_1} E}}{\pi^2(jm_1 - \frac{1}{\tau\omega_H})} \int_0^\pi e^{j\left(\pi(\frac{j}{\tau\omega_H} + \mu)\sin(x_2)m_1 + (2m_2-1)x_2\right)} dx_2 = \\ &= -\frac{e^{\frac{-\pi}{\tau\omega_H} (-1)^{m_1} E}}{\pi^2(jm_1 - \frac{1}{\tau\omega_H})} \left(\pi J_{2m_2-1}\left(\pi m_1 \left(\frac{j}{\tau\omega_H} + \mu\right)\right) + 2j \left(\frac{J_0\left(\pi m_1 \left(\frac{j}{\tau\omega_H} + \mu\right)\right)}{2m_2 - 1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v}\left(\pi m_1 \left(\frac{j}{\tau\omega_H} + \mu\right)\right) \left(\frac{1}{2m_2 - 1 - 2v} + \frac{1}{2m_2 - 1 + 2v} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Всі вільні компоненти, зображені на рис. 3.7, б, можливо виразити через одну з них, найзручніше через $u_{BIL2}(x_2)$:

$$u_{BILk}(x_2) = u_{BIL2}(x_2 + (k-2)\Delta x_2) e^{-(k-2)\Delta x_2 / (\tau\omega_H)}. \quad (3.72)$$

З аналізу виразу (3.72) можна зробити висновок, що за умови відомого спектра компоненти $u_{BIL}(x_2)$ значення інших компонент отримують за умови використання теореми запізнення [146]. Спектральну характеристику вільної складової $u_{BIL2}(x_2)$ розраховують за формулою:

$$\begin{aligned} C_{BIL2(m_1)(m_2)} &= \frac{e^{jm_2\Delta x_2}}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi u_{02}(x_2) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1 + m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_\pi^{2\pi} u_{02}(x_2) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1 + m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

де $u_{02}(x_2) = E(1 - e^{-x_{2(k)}})e^{-(\pi - x_{2(k)})/2} = -jEe^{-\pi} \sin(j\pi\mu\sin(x_2))$ - початкові умови для компоненти $u_{BIL2}(x_2)$, множник $e^{jn\Delta x_2}$ враховує зміщення компоненти $u_{BIL2}(x_2)$ на один період носійної функції.

$$\begin{aligned}
C_{BIL2(m_1)(m_2)} &= -\frac{j e^{jn\Delta x_2} E e^{-\pi}}{\pi^2} \left(\int_0^\pi \sin(j\pi\mu \sin(x_2)) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 + \right. \\
&\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} \sin(j\pi\mu \sin(x_2)) \int_0^{2\pi} e^{\frac{-x_1}{\tau\omega_H}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right) = \\
&= \frac{j E e^{-\pi} e^{jm_2\Delta x_2} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega_H)}) (1 - e^{jm_2\pi})}{\pi^2 (jm_1 - 1 / \tau\omega_H)} \int_0^\pi \sin(j\pi\mu \sin(x_2)) e^{jm_2x_2} dx_2.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Для парних n коефіцієнти розкладу дорівнюють нулю, $C_{BIL(2m_1)(2m_2)} = 0$. Для непарних – розраховуються за формулою:

$$C_{BIL2(m_1)(2m_2-1)} = \frac{j E e^{-\pi} e^{j(2m_2-1)\Delta x_2} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega_H)})}{\pi (jm_1 - 1 / \tau\omega_H)} J_{(2m_2-1)}(j\mu\pi). \tag{3.75}$$

Розрахунок спектра інших компонент $u_{BIL}(x_2)$ здійснюють з використанням теореми запізнення:

$$\begin{aligned}
C_{BILk(m_1)(2m_2-1)} &= C_{BIL2(m_1)(2m_2-1)} e^{j(2m_2-1)(k-2)\Delta x_2} = \\
&= \frac{j E e^{-\pi} e^{j(2m_2-1)(k-1)\Delta x_2} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega_H)})}{\pi (jm_1 - 1 / \tau\omega_H)} J_{(2m_2-1)}(j\mu\pi).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Компоненти $u_{BIL2}(x_2)$, $u_{BIL2(P+1)}(x_2)$ мають подібну структуру, тому для представлення їх спектра в згорнутому виді знайдемо їх суму:

$$\begin{aligned}
C_{BIL\Sigma(m_1)(2m_2-1)} &= \sum_{k=2}^{P/2+1} C_{BILk(m_1)(2m_2-1)} = \\
&= \frac{j E e^{-\pi} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega_H)}) J_{(2m_2-1)}(j\mu\pi)}{\pi (jm_1 - 1 / \tau\omega_H)} \frac{e^{j\Delta x_2(2m_2-1)} (e^{j\Delta x_2(2m_2-1)P/2} - 1)}{e^{j\Delta x_2(2m_2-1)} - 1} = \\
&= 2 \frac{j E e^{-\pi} (1 - e^{-2\pi/(\tau\omega_H)}) J_{(2m_2-1)}(j\mu\pi)}{\pi (jm - 1 / \tau\omega_H)} \frac{e^{j\Delta x_2(2m_2-1)}}{1 - e^{j\Delta x_2(2m_2-1)}}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Останню компоненту вільної складової розраховують з використанням ряду Фур'є однієї змінної. Вона описує вплив початкових умов на початку півперіода модулюючої напруги:

$$C_{BIL0(2m_2-1)} = \frac{1}{\pi} u_0 e^{-\pi/(\omega_M \tau)} \int_0^{\pi} e^{-x_2/(\omega_M \tau)} e^{-j(2m_2-1)y} dx_2 =$$

$$= \frac{u_0 e^{-\pi/(\omega_M \tau)}}{\pi(1/\omega_M \tau + j(2m_2-1))} (1 - e^{-\pi/(\omega_M \tau)}). \quad (3.78)$$

7. Перехід від базового модульованого сигналу, до модульованого сигналу із заданою носійною функцією

Цей пункт розрахунку в даному випадку пропускається, оскільки спектр перехідної і вільної складових, відповідає заданому сигналу, модульованому за законом ШІМ.

8. Визначення сумарної спектральної характеристики

Отже, спектральна характеристика ШІМ сигналу II роду складається з п'яти складових:

$$C_k = C_{ПЕР1k} + C_{ПЕР2k} + C_{BIL0k} + C_{BIL1k} + C_{BIL\Sigma k}. \quad (3.79)$$

Загалом, методика розрахунку спектральної характеристики вихідної напруги, модульованої за законом ШІМ-II, має простіші вирази, ніж для випадку ШІМ-I, оскільки вільна складова розраховується за допомогою ряду Фур'є двох змінних, що спрощує кінцеві аналітичні вирази. У цілому, спільне використання ряду Фур'є однієї і двох змінних дозволяє виділити складові, що мають частоту носійної і модулюючої функцій і, тим самим, спростити аналітичний вираз спектральної характеристики струмів і напруг на виході фільтра.

3.3. Інтегральні показники якості модульованих струмів і напруг

Інтегральні параметри якості електроенергії широко використовуються для оцінки ефективності керування електротехнічним обладнанням мережі, тому актуальною задачею є розробка ефективних алгоритмів для їх розрахунку, що дозволяє використовувати значення інтегральних показників якості як задавальну дію в процесі керування. Для оцінки якості напруги змінного струму найчастіше використовуються показники: коефіцієнт потужності χ , коефіцієнт гармонік K_G , коефіцієнт нелінійних спотворень $K_{НС}$. Для визначення цих показників необхідно розрахувати: амплітуду першої гармоніки струму $I_{(1)}$, фазовий зсув першої

гармоніки струму відносно першої гармоніки напруги $\varphi_{(1)}$, діюче значення струму I . Значення перших гармонік струму і напруги та їх фази розраховуються безпосередньо з використанням узагальненого ряду Фур'є, тоді як для визначення діючого значення струму на основі узагальненого ряду Фур'є необхідно розробити методику розрахунку.

Як правило, діюче значення напруги U або струму I розраховується в часовій області, але це також можливо зробити в операторній області [11], завдяки виконанню рівності Парсеваля [147] для ряду Фур'є діюче значення також можна розрахувати в частотній області:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2}. \quad (3.80)$$

З практичної точки зору є сенс розробити методику розрахунку діючого значення, як у часовій, так і в частотній областях, оскільки трудомісткість розрахунку кінцевого виразу може бути меншою, як у першому, так і в другому випадку – все залежить від форми сигналу.

Спочатку розглянемо методику розрахунку діючого значення сигналу у часовій області. Аналогічно до розрахунку спектральних компонент узагальненого ряду Фур'є представимо сигнал функцією M змінних, $y(x_1, x_2, \dots, x_M)$. Тоді за аналогією з формулою (2.4) діюче значення Y сигналу $y(x_1, x_2, \dots, x_M)$ розраховується за формулою:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \int_0^{2\pi V} \dots \int_0^{2\pi} y(x_1, x_2, \dots, x_M)^2 \prod_{i=1}^M dx_i}. \quad (3.81)$$

Значення отримані за формулою (3.81) дають точний результат, якщо кратність модуляції сигналу P прямує до нескінченності, $P \rightarrow \infty$. Похибка в розрахунку діючого значення пов'язана з похибкою заміни модулюючої функції кусково-лінійною функцією на періоді носійної функції, що має вплив, як на похибку модуляції, так і на результат при $P < 20$ [148]. Тому при вирішенні

практичних задач діюче значення сигналу, отримане за формулою (3.81), розраховується з достатньою точністю.

Розглянемо методику розрахунку діючого значення сигналу в часовій області. Для прикладу розглянемо сигнал з двосторонньою однополярною модуляцією ШІМ-II з модулюючою функцією $\sin(x_2)$. Оскільки модулююча функція є непарною, інтегрування за змінною x_2 проводиться на інтервалі $[0; \pi]$. Результат використання формули (3.81) наведено нижче:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} A^2 dx_1 dx_2} = A \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}. \quad (3.82)$$

Аналогічно можна порахувати діюче значення сигналу для інших модифікацій ШІМ другого роду.

У випадку ШІМ-I при розрахунку діючого значення інтеграл по змінній x_1 замінюється сумою, тому формула для розрахунку діючого значення є більш громіздкою. Наприклад для однополярної двосторонньої ШІМ-I вона має вид:

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\frac{A^2 \Delta x_2}{\pi^2} \sum_{i=0}^{P/2-1} \int_{\pi(1-\mu\sin((i+\varphi_f/2\pi)\Delta x_2))}^{\pi(1+\mu\sin((i+\varphi_f/2\pi)\Delta x_2))} dx_1} = A \sqrt{\frac{2\mu\Delta x_2}{\pi} \sum_{i=1}^{P/2} \sin(i + \varphi_f / 2\pi)\Delta x_2)} = \\ &= A \sqrt{\frac{2\mu\Delta x_2 \cos(\Delta x_2(\varphi_f / \pi - 0.5))}{\pi \sin(\Delta x_2)}}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

де Δx_2 відповідає періоду носійної функції.

На відміну від ШІМ-II, період носійної функції в ШІМ-I задається явно через константу Δx_2 , тому формула (3.83) дозволяє отримати точне діюче значення сигналу.

У табл. 3.1 наведено розрахункові формули для діючих значень, отриманих за наведеною методикою для типових законів модуляції, та, як приклад, формули для параметрів якості електроенергії K_L , χ .

Таблиця. 3.1. Розрахункові формули для діючих значень модульованих сигналів

Тип модуляції	Діюче значення модульованого сигналу	Параметри якості електроенергії (K_r , χ)
Однополярна ШІМ-II	$Y = A \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}$	$K_r = \sqrt{1 - \frac{\mu\pi}{4}}$ $\chi = \frac{\sqrt{\mu\pi}}{2} \cos(\varphi)$
Двополярна ШІМ-II	$Y = A$	$K_r = \sqrt{1 - \frac{\mu}{2}}$ $\chi = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \cos(\varphi)$
Однополярна ШІМ-I	$Y = A \times \sqrt{\frac{2\mu\Delta x_2 \cos(\Delta x_2(\varphi_f / \pi - 0.5))}{\pi \sin(\Delta x_2)}}$	$K_r = \frac{\sqrt{\frac{2\mu\Delta x_2 \cos(\Delta x_2(\varphi_f / \pi - 0.5))}{\pi \sin(\Delta x_2)} - \frac{\mu}{2}}}{\sqrt{\frac{2\mu\Delta x_2 \cos(\Delta x_2(\varphi_f / \pi - 0.5))}{\pi \sin(\Delta x_2)}}}$ $\chi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\pi \sin(\Delta x_2)}{\Delta x_2 \cos(\Delta x_2(\varphi_f / \pi - 0.5))}} \cos(\varphi)$
Двополярна ШІМ-I	$Y = A$	$K_r = \sqrt{1 - \frac{\mu}{2}}$ $\chi = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \cos(\varphi)$
Однополярна ШІМ-I з передмодуляцією третьою гармонікою	$Y = A \sqrt{\frac{2\Delta x_2 \mu^*}{\pi}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{\sin(\pi / P)} + \frac{a^*}{\sin(3\pi / P)} \right)}$	$K_r = \frac{\sqrt{\frac{2\Delta x_2 \mu}{\pi} \left(\frac{1}{\sin(\pi / P)} + \frac{a^*}{\sin(3\pi / P)} \right)} - \frac{\mu^2}{2}}{\sqrt{\frac{2\Delta x_2 \mu}{\pi} \left(\frac{1}{\sin(\pi / P)} + \frac{a^*}{\sin(3\pi / P)} \right)}}$ $\chi = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\mu\pi \sin(\Delta x_2)}{\frac{\Delta x_2}{\pi} \left(\frac{1}{\sin(\pi / P)} + \frac{a^*}{\sin(3\pi / P)} \right)}} \cos(\varphi)$

Формули для розрахунку діючого значення напруги та параметрів якості електроенергії є компактними і відносно простими, однак у певних випадках є доцільним виконати розрахунок параметрів якості електроенергії у спектральній області. Розглянемо розрахунок діючого значення сигналу у спектральній області на прикладі однополярної двосторонньої ШІМ-II, амплітуда гармоніки $2k-1$ якої розраховується за формулою [149]:

$$C_{2k-1} = \begin{cases} jA\mu + \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{1-m_1P}(m_1\pi\mu), k=1; \\ \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{2k-1-m_1P}(m_1\pi\mu), k>1. \end{cases} \quad (3.84)$$

Для випадку, коли кратність модуляції $P > 10$ [148], з відносною похибкою, що не перевищує 10^{-5} , вираз (3.84) можна звести до виду:

$$C_{2k-1} = \begin{cases} jA\mu, k=1; \\ \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{2k-1-m_1P}(m_1\pi\mu), k>1. \end{cases} \quad (3.85)$$

Відповідно до формул (3.80) і (3.85) діюче значення напруги розраховується за формулою:

$$U = A \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(m_1\pi\mu) \right)^2}. \quad (3.86)$$

Розкривши дужки, отримаємо:

$$U = A \times \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \left(\frac{J_{2k-1-m_1P}(m_1\pi\mu)^2}{m_1^2} + \frac{2(-1)^{m_1} J_{2k-1-m_1P}(m_1\pi\mu) \sum_{v=m_1+1}^{\infty} (-1)^v J_{2k-1-vP}(v\pi\mu)}{m_1 v} \right)}. \quad (3.87)$$

Замінивши порядок сумування та зробивши заміни: $2k-1-m_1P = 2k^*-1$ у формулі (3.87), отримаємо:

$$U = A \times \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{k^*=2-0.5m_1P}^{\infty} \frac{J_{2k^*-1}^2(m_1\pi\mu)}{m_1^2} + 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{v=m_1+1}^{\infty} \sum_{k^*=2-0.5m_1P}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+v} J_{2k^*-1}(m_1\pi\mu) J_{2k^*-1-(v-m_1)P}(v\pi\mu)}{m_1 v} \right)}. \quad (3.88)$$

Відомо, що при перевищенні порядку функції Бесселя першого роду над її аргументом, значення функції Бесселя прямує до нуля [150]:

$$J_n(z) \rightarrow 0, |n| + 1 > z. \quad (3.89)$$

Сума ряду (3.88) за змінною k^* починається зі значення $2 - 0.5m_1P$, оскільки $0.5P \gg \pi\mu$, значення всіх членів ряду, починаючи від мінус нескінченності до $2 - 0.5m_1P$ прямують до нуля і для спрощення подальших розрахунків їх можна включити до суми (3.88):

$$U = A \times \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{k^*=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2k^*-1}^2(m_1\pi\mu)}{m_1^2} + 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{v=m_1+1}^{\infty} \sum_{k^*=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+v} J_{2k^*-1}(m_1\pi\mu) J_{2k^*-1-(v-m_1)P}(v\pi\mu)}{m_1 v} \right)}. \quad (3.90)$$

Використавши теорему додавання для Бессельових функцій [151]:

$$J_n(z_1 \pm z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(z_1) J_m(z_2), |z_1| \geq |z_2|, \quad (3.91)$$

для $n = 0$, $z_1 = z_2$ і знаку «+», отримаємо [151]:

$$\sum_{k^*=-\infty}^{\infty} J_{k^*}^2(m_1\pi\mu) = 1. \quad (3.92)$$

З іншого боку відома тотожність для суми квадратів функцій Бесселя парного порядку [149]:

$$J_0^2(m_1\pi\mu) + \sum_{k^*=-\infty}^{+\infty} J_{2k^*}^2(m_1\pi\mu) = 1 + J_0(2m_1\pi\mu). \quad (3.93)$$

Віднявши від виразу (3.92) вираз (3.93), отримаємо значення суми квадратів непарних функцій Бесселя у формулі (3.90):

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{k^*=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2k^*-1}^2(m_1\pi\mu)}{m_1^2} = - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_0(2m_1\pi\mu)}{m_1^2}. \quad (3.94)$$

У другій сумі використовуємо властивість функцій Бесселя з від'ємним порядком [152]:

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z). \quad (3.95)$$

Після використання властивості (3.95) і підстановки порахованого значення в (3.91), формула (3.90) має вид:

$$U = A \times \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \left(-\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_0(2m_1\pi\mu)}{m_1^2} + 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{v=m_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+v+1}}{m_1 v} \sum_{k^*=-\infty}^{\infty} J_{2k^*-1}(m_1\pi\mu) J_{(v-m_1)P-2k^*+1}(v\pi\mu) \right)}. \quad (3.96)$$

Внутрішня сума в формулі (3.97) повністю відповідає формулі (3.94):

$$U = A \sqrt{\mu^2 + \frac{4}{\pi^2} \left(-\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_0(2m_1\pi\mu)}{m_1^2} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{v=m_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+v+1}}{m_1 v} J_{(v-m_1)P}((v+m_1)\pi\mu) \right)}. \quad (3.97)$$

Далі спрощення виразу (3.97) є недоцільним, однак доданки під знаком суми дуже швидко прямують до нуля, тому для отримання діючого значення достатньо взяти декілька перших членів.

Порівнюючи кінцевий результат (3.97) з виразом у табл. 3.1 для однополярної ШІМ-II, можна зробити висновок, що діюче значення розраховане в часовій області є компактнішим.

Описані в даному розділі методи та методики, що розширюють можливості використання узагальнених рядів Фур'є для розрахунку спектрів модульованих струмів і напруг:

- метод розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції;
 - метод розрахунку спектра струму та напруги на виході фільтра;
 - методики формування узагальнених аналітичних формул у згорнутому аналітичному виразі для розрахунку інтегральних параметрів якості електроенергії при параметричному завданні параметрів модуляції,
- дають можливість спростити вирішення ряду практичних задач, наведених у табл. 3.2, при проектуванні імпульсних перетворювачів електричної енергії та їх систем керування.

Таблиця 3.2. Задачі проектування імпульсних перетворювачів електричної енергії, що спрощуються при використанні узагальненого ряду Фур'є

Задача	Використані методи і методики	Переваги
1. Синтез законів керування перетворювачів зі стабілізацією параметрів якості електроенергії	<ul style="list-style-type: none"> - методики формування аналітичних формул для розрахунку параметрів якості електроенергії; - метод розрахунку спектра струмів і напруг зі змінною частотою носійної функції, параграф 3.1; - метод розрахунку спектра струму та напруги на виході фільтра, параграф 3.2 	<ul style="list-style-type: none"> - значне зменшення обсягу математичних операцій при розрахунку параметрів якості електроенергії, див. табл. 3.1, дозволяє використовувати запропонований алгоритм керування в системах з дешевими мікроконтролерами; - стабілізація параметрів якості електроенергії дає можливість динамічно змінювати кратність модуляції і тим самим зменшувати динамічні втрати в перетворювачі
2. Аналіз інтергармонічних складових струмів і напруг у замкненій аналітичній формі при довільному співвідношенні частот процесів	<ul style="list-style-type: none"> - узагальнення ряду Фур'є на довільну кількість змінних; - методики формування аналітичних формул для розрахунку параметрів якості електроенергії 	<ul style="list-style-type: none"> - значне зменшення математичних операцій завдяки усуненню необхідності перерахунку спектра через зміну частот процесів
3. Вибір структури перетворювачів електричної енергії з врахуванням заданих значень параметрів якості електроенергії	<ul style="list-style-type: none"> - методики формування аналітичних формул для розрахунку параметрів якості електроенергії 	<ul style="list-style-type: none"> - значне зменшення математичних операцій через відсутність необхідності розрахунку параметрів якості електроенергії у широкому діапазоні зміни вхідних і вихідних параметрів перетворювача

Окрім задач, наведених у табл. 3.2, узагальнені ряди доцільно використовувати для широкого ряду проблем пов'язаних з аналізом та регулюванням параметрів якості електроенергії, які є функцією декількох змінних і тому можуть бути компактно описані у просторі ряду Фур'є декількох змінних.

Висновки до розділу 3

1. Показано, що метод розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції, дозволяє використовувати узагальнений ряд Фур'є для адаптивних методів модуляції, зокрема для частотно-імпульсної та програмної модуляції.

2. Продемонстровано метод спільного використання ряду Фур'є однієї і двох змінних для розрахунку спектра струму або напруги на виході фільтра, який дозволяє виділити складові, що мають частоту носійної і модулюючої функцій і, тим самим, спростити вираз спектральної характеристики струмів і напруг на виході фільтра.

3. Запропоновано методику розрахунку параметрів якості електроенергії у аналітичній формі, який дозволяє значно зменшити обсяг математичних операцій для їх розрахунку та дає можливість реалізувати методику у системах керування напівпровідниковими перетворювачами.

4. Показано, що використання розроблених методів і методик спрощує вирішення ряду практичних задач при проектуванні імпульсних перетворювачів електричної енергії та їх систем керування, серед яких можна виділити: синтез законів керування перетворювачів зі стабілізацією параметрів якості електроенергії; аналіз інтергармонічних складових струмів і напруг у замкненій аналітичній формі при довільному співвідношенні частот процесів; вибір структури перетворювачів електричної енергії з врахуванням заданих значень параметрів якості електроенергії, що підтверджує наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів.

РОЗДІЛ 4

УЗАГАЛЬНЕНИЙ РЯД ФУР'Є ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ОДНОФАЗНИХ ІНВЕРТОРІВ НАПРУГИ

Однофазні інвертори зазвичай використовуються для перетворення параметрів електроенергії первинних джерел енергії, наприклад вітрових турбін, сонячних батарей, паливних елементів, мікрогазових турбін та систем акумулювання енергії, що під'єднуються до мережі змінного струму або є складовою частиною перетворювачів постійного струму з гальванічною розв'язкою. Для стабільного функціонування таких систем електроживлення, окрім перетворення параметрів електроенергії, інвертори повинні забезпечувати:

- стабілізацію вихідної змінної напруги при коливанні вхідної напруги в широких межах – для автономних систем електроживлення, або формування вихідного струму, що повторює форму напруги мережі, - для систем електроживлення під'єднаних до мережі;
- задані значення параметрів якості електроенергії із заданим коефіцієнтом гармонік K_G , відхиленням напруги та частоти;
- захист джерел енергії від аномальних значень напруги та частоти мережі;
- відбір максимальної потужності від первинних джерел енергії.

Відповідно до наявності електричної ізоляції, інвертори розділяються на ізольовані або неізольовані. Електрична ізоляція може бути виконана за допомогою мережевого трансформатора, розрахованого на частоту 50 Гц [153], або високочастотного. Залежно від співвідношення амплітуд напруги на вході постійного струму порівняно з вихідною напругою змінного струму, інвертори можуть бути понижувальними, підвищувальними або універсальними.

Топології інверторів можуть мати одно- або багатоланкову структуру. Одноланковий інвертор перетворює параметри електроенергії одноетапно, включаючи перетворення рівня напруги та формування синусоїдальної форми струму [154-156]. Кількість ключових елементів в одноланковому інверторі, як правило, складає чотири [154, 157] або шість [158-160].

Багатофазний інвертор має декілька етапів перетворення параметрів електроенергії, кожна з ланок виконує одну з необхідних функцій: зміну рівня напруги, електричну ізоляцію, перетворення постійного струму в змінний. Багатофазні інвертори можуть мати ланки: DC – DC – AC; DC – AC – DC – AC; DC – AC – AC [161-164].

Класифікацію топологій однофазних інверторів показано на рис. 4.1.

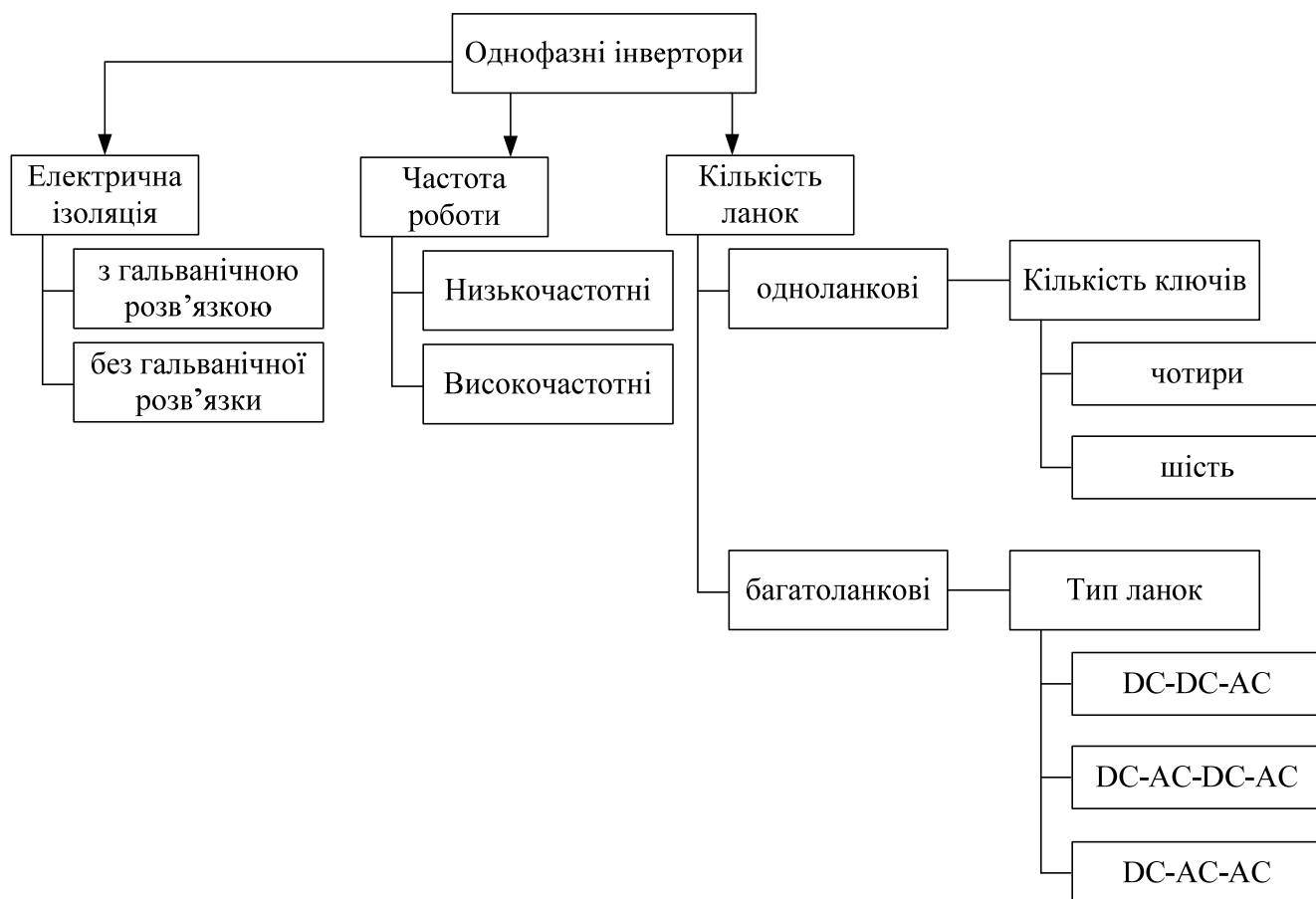


Рис. 4.1. Класифікація топологій однофазних інверторів

Для реалізації ефективного керування розглянутими топологіями інверторів у роботі пропонується забезпечити модифікації існуючих законів модуляції:

- регулювання кратності модуляції напруги інвертора для забезпечення необхідного значення коефіцієнта гармонік K_H з одночасним зменшенням обсягу динамічних втрат у перетворювачі, що дозволяє на етапі проектування зменшити габарити необхідних радіаторів;

- синтез двополярної модуляції зі зменшеним значенням першої гармоніки з метою зменшення масогабаритних показників трансформатора інвертора.

Розглянемо реалізацію кожної із описаних модифікацій окремо.

4.1. Керування кратністю модуляції однофазного ШІМ інвертора без гальванічної розв'язки

Значення параметра якості напруги інвертора на постійному струмі – коефіцієнта пульсацій K_L , на змінному струмі – коефіцієнта гармонік K_G , залежать від співвідношення періода носійної функції T_H та сталої часу τ вихідного фільтра інвертора. Забезпечення задовільних значень параметрів якості напруги може бути досягнуто при виконанні такої умови $\tau > 3T_H$ [165]. Тобто для забезпечення задовільних параметрів якості напруги потрібно зменшувати період носійної функції. Однак зі зменшенням періода збільшується кількість комутацій транзисторів інвертора, що збільшує обсяг динамічних втрат. Тому інвертор має оперувати на певній проміжній частоті, що одночасно забезпечує необхідні значення параметрів якості і не спричинює великих динамічних втрат.

У випадку змінного навантаження стала часу фільтра весь час змінюється, що призводить до постійної зміни значень параметрів якості напруги. У цьому випадку для забезпечення необхідного значення параметрів якості електроенергії можливо задати постійну максимальну частоту роботи перетворювача, що забезпечує задане значення параметрів якості електроенергії у всьому діапазоні зміни опору навантаження, але збільшує обсяг динамічних втрат. Тому доцільніше регулювати частоту роботи інвертора з метою стабілізації заданого значення параметра якості електроенергії.

Для інвертора, що входить до складу перетворювача постійної напруги, регулювання частоти пов'язане з вимірюванням пульсації вихідної напруги та розрахунку на його основі значення коефіцієнта пульсації K_L , що вимагає мінімального обсягу математичних обчислень і може бути реалізоване в системі керування у реальному масштабі часу. Натомість при формуванні вихідної синусоїдальної напруги необхідно розраховувати значення коефіцієнта гармонік K_G , що вимагає достатньо великого обсягу розрахунків, оскільки передбачає розрахунок діючого значення напруги, і тому суттєво збільшує вимоги до обчислювального ядра систем керування інверторами.

Використання узагальненого ряду Фур'є дозволяє значно зменшити обсяг математичних операцій при розрахунку коефіцієнта гармонік і полегшує реалізацію принципу керування за значенням параметрів якості електроенергії як задавальної дії на основі регулювання частоти роботи інвертора у реальному масштабі часу. Для чого доцільно розробити методику розрахунку коефіцієнта гармонік та алгоритму керування на його основі.

4.1.1. Виведення аналітичного співвідношення для розрахунку коефіцієнта гармонік

Розглянемо методику розрахунку параметрів для однофазного мостового інвертора з однополярною односторонньою ШІМ-ІІ та фільтром першого порядку за заданим значенням коефіцієнта гармонік K_G з індуктивністю L і опором R , електрична схема якого наведена на рис. 3.4, а.

Для гармоніки з номером n передавальна характеристика K_n при використанні індуктивного фільтра розраховується за формулою:

$$K_n = \frac{R}{\sqrt{(n\omega_M L)^2 + R^2}}, \quad (4.1)$$

де ω_M - частота модулюючої функції.

Перша гармоніка у частотній області відмежована від вищих гармонік з ненульовим значенням ділянкою спектра, що орієнтовно дорівнює кратності модуляції P . Тому для вищих ненульових гармонік при коректно обраному фільтрі [166] виконується умова $(n\omega_M L)^2 \gg R^2$ і формулу (4.1) можна записати таким чином:

$$K_n = \frac{R}{n\omega_M L}. \quad (4.2)$$

З урахуванням виразів (4.1) і (4.2) формула для розрахунку коефіцієнта гармонік після фільтра має вид:

$$K_r = \frac{\sqrt{U_\phi^2 - U_{1\phi}^2}}{U_\phi} = \frac{\frac{R}{\omega_M L} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_n}{n}\right)^2}}{\sqrt{\frac{(C_1 R)^2}{R^2 + (\omega_M L)^2} + \left(\frac{R}{\omega_M L}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_n}{n}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_n}{n}\right)^2}}{\sqrt{\frac{C_1^2}{1 / (\omega_M \tau)^2 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_n}{n}\right)^2}}, \quad (4.3)$$

де U_ϕ – діюче значення напруги після фільтра, $U_{\phi 1}$ – діюче значення напруги першої гармоніки після фільтра, C_n – діюче значення гармоніки напруги з номером n до фільтра, τ – стала часу фільтра.

Значення коефіцієнта гармонік, розраховане за формулою (4.3), можливо підтримувати на заданому рівні шляхом вибору необхідного значення частоти носійної функції f_H , яку можливо виразити через кратність модуляції P , $f_H = P \cdot f_M$.

Значення вищих гармонік з непарним номером $2k-1$, C_{2k-1} за умови використання напруги з двосторонньою однополярною ШІМ-II розраховується за формулою (див. розділ 2):

$$C_{2k-1} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} 2A}{m_1 \pi} J_{2k-1-m_1 P}(\pi \mu m_1), \quad (4.4)$$

де A – амплітуда модульованого сигналу.

Амплітуда першої гармоніки C_1 з достатньою точністю дорівнює амплітуді модулюючої функції, у випадку гармонічного задавального сигналу $A \sin(\omega_M t)$, $C_1 = \mu A$.

Підставимо значення гармонік, розрахованих на основі ряду Фур'є двох змінних, у формулу (4.3):

$$K_r = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{((2k-1)\pi)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} J_{2k-1-m_1 P}(\pi \mu m_1)}{m_1} \right)^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{1 / (\omega_M \tau)^2 + 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{((2k-1)\pi)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} J_{2k-1-m_1 P}(\pi \mu m_1)}{m_1} \right)^2}}. \quad (4.5)$$

Коефіцієнт гармонік K_Γ в формулі (4.5) описується на основі суми подвійного ряду за змінними m_1 і k . Розглянемо ряд за змінною m_1 :

$$\left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1)}{m_1} \right)^2 = \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_{2k-1-m_1P}^2(\pi\mu m)}{m_1^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1) \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^{z_1}}{z_1} J_{2k-1-z_1P}(\pi\mu z_1) \right). \quad (4.6)$$

Виділимо у формулі (4.6) складові S_{m_1} і $S_{(m_1)(z_1)}$:

$$S_{m_1} = \frac{J_{2k-1-m_1P}^2(\pi\mu m_1)}{m_1^2}; \quad (4.7)$$

$$S_{(m_1)(z_1)} = 2 \frac{(-1)^{m_1}}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1) \frac{(-1)^{z_1}}{z_1} J_{2k-1-z_1P}(\pi\mu z_1). \quad (4.8)$$

Через змінні S_{m_1} і $S_{(m_1)(z_1)}$ ряд (4.6) має запис:

$$\left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1) \right)^2 = \sum_{m_1=1}^{\infty} S_{m_1} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} S_{(m_1)(z_1)}. \quad (4.9)$$

Підставимо вираз (4.9) у формулу (4.5):

$$K_\Gamma = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{((2k-1)\pi)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} S_{m_1} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} S_{(m_1)(z_1)} \right)}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{1/(\omega_M \tau)^2 + 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{((2k-1)\pi)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} S_{m_1} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} S_{(m_1)(z_1)} \right)}}. \quad (4.10)$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо:

$$K_\Gamma = \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{m_1}}{((2k-1))^2} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{(m_1)(z_1)}}{((2k-1))^2}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{1/(\omega_M \tau)^2 + 1} + \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{m_1}}{((2k-1))^2} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{z_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{(m_1)(z_1)}}{((2k-1))^2} \right)}}. \quad (4.11)$$

Знайдемо суми рядів за змінною k :

$$G_{m_1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{m_1}}{(2k-1)^2} = \frac{1}{m_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_{2k-1-m_1}^2(\pi\mu m_1)}{(2k-1)^2}; \quad (4.12)$$

$$G_{(m_1)(z_1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{(m_1)(z_1)}}{(2k-1)^2} = 2 \frac{(-1)^{m_1+z_1}}{m_1 \cdot z_1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_{2k-1-m_1}(\pi\mu m_1) J_{2k-1-z_1}(\pi\mu z_1)}{(2k-1)^2}. \quad (4.13)$$

На основі властивостей функцій Бесселя [120] та збіжності рядів [167] значення параметрів $G_{(m_1)(0)}$, $G_{(m_1)(1)}$, $G_{(m_1)(z_1)(0)}$ і $G_{(m_1)(z_1)(1)}$ у виді згорнутих аналітичних формул виведено у додатку Г, нижче наведено кінцеві результати розрахунків:

$$G_{m_1(0)} = \frac{(1 - J_0(2m_1\pi\mu))}{2m_1^4 P^2}; \quad (4.14)$$

$$G_{m_1(1)} = \frac{(\pi\mu)^2 (1 + J_0(2m_1\pi\mu) + J_2(2m_1\pi\mu))}{(m_1 P)^4}; \quad (4.15)$$

$$G_{(m_1)(z_1)(0)} = \frac{(-1)^{m_1+z_1+1}}{z_1 m_1^3 P^2} \times \quad (4.16)$$

$$(J_{(z_1-m_1)P}(\pi\mu(z_1+m_1)) - J_{(z_1-m_1)P}(\pi\mu(z_1-m_1)));$$

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{(-1)^{m_1+z_1}}{z_1 m_1^3 P^3} (J_{(z_1-m_1)P+1}(\pi\mu(z_1+m_1)) + \quad (4.17)$$

$$J_{(z_1-m_1)P+1}(\pi\mu(z_1-m_1)) + J_{(z_1-m_1)P-1}(\pi\mu(z_1+m_1)) + J_{(z_1-m_1)P-1}(\pi\mu(z_1-m_1))).$$

Порівнюючи значення сум $G_{m_1(0)}$ і $G_{m_1(1)}$, формули (4.14), (4.15), можна зробити висновок, що $G_{m_1(0)} / G_{m_1(1)} \sim P^2$, аналогічно $G_{m_1(0)} / G_{m_1(2)} \sim P^4$ і т.д. Навіть для мінімальних значень кратності модуляції $P = 10$, значення суми $G_{m_1(0)}$ на два порядки більше $G_{m_1(1)}$ і на чотири - $G_{m_1(2)}$. Тому при практичних розрахунках сумами, $G_{m_1(2)} \dots G_{m_1(k)}$ можна знехтувати, а складову $G_{m_1(1)}$ враховувати наближено.

Тоді як відношення сум рядів $G_{(m_1)(z_1)(0)}$ і $G_{(m_1)(z_1)(1)}$, формули (4.16), (4.17), пропорційне кратності модуляції P , $G_{(m_1)(z_1)(0)} / G_{(m_1)(z_1)(1)} \sim P$, тому для розрахунку доцільно враховувати перші два члени ряду $G_{(m_1)(z_1)(1)}$.

Порівняємо порядок значень сум рядів $G_{m_1(0)}$, $G_{(m_1)(z_1)(0)}$, $G_{(m_1)(z_1)(1)}$. Значення суми $G_{m_1(0)}$ виражається через значення сум Бесселя нульового порядку, тому

відповідно до властивостей функцій Бесселя, вона може мати ненульове значення у всьому діапазоні значень аргументу. Суми $G_{(m_1)(z_1)(0)}$, $G_{(m_1)(z_1)(1)}$ виражаються через функції Бесселя з порядком, кратним параметру модуляції P , тому вони мають ненульові значення, для аргументів, які перевищують порядок функцій Бесселя. Суми $G_{(m_1)(z_1)(0)}$ і $G_{(m_1)(z_1)(1)}$ мають найбільше значення, коли різниця їх змінних сумування m_1 і z_1 є мінімальною $z_1 - m_1 = 1$, оскільки тоді ці суми виражаються через функції найменшого порядку. Тому розглянемо цей випадок в першу чергу.

$$G_{(m_1)(z_1)(0)} = \frac{(J_P(\pi\mu(z_1 + m_1)) - J_P(\pi\mu))}{z_1 m_1^3 P^2}; \quad (4.18)$$

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{-1}{z_1 m_1^3 P^3} \times (J_{P+1}(\pi\mu(z_1 + m_1)) + J_{P+1}(\pi\mu) + J_{P-1}(\pi\mu(z_1 + m_1)) + J_{P-1}(\pi\mu)). \quad (4.19)$$

Оскільки $P \gg \pi\mu$, вирази (4.18) і (4.19) можливо спростити до виду:

$$G_{(m_1)(z_1)(0)} = \frac{J_P(\pi\mu(z_1 + m_1))}{z_1 m_1^3 P^2}; \quad (4.20)$$

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{-1}{z_1 m_1^3 P^3} (J_{P+1}(\pi\mu(z_1 + m_1)) + J_{P-1}(\pi\mu(z_1 + m_1))). \quad (4.21)$$

Оцінімо, значення сум (4.20) і (4.21) для глибини модуляції $\mu = 1$, за якого значення рядів максимальні для випадку $z_1 - m_1 > 1$. Значення рядів $G_{(m_1)(z_1)(0)}$ і $G_{(m_1)(z_1)(1)}$ починають відрізнятись від нуля за умови:

$$P < \pi(z_1 + m_1). \quad (4.22)$$

Нерівність (4.22) для значення кратності модуляції $P = 10$ істинна коли $z_1 + m_1 \geq 3$; для $P = 20$ – $z_1 + m_1 \geq 7$; для $P = 30$ – $z_1 + m_1 \geq 11$. За умови, що різниця параметрів z_1 і m_1 дорівнює одиниці, $z_1 - m_1 = 1$, абсолютні значення параметрів є такими: $P = 10$, $z_1 = 2$, $m_1 = 1$; $P = 20$, $z_1 = 4$, $m_1 = 3$; $P = 30$, $z_1 = 6$, $m_1 = 5$. Оскільки значення функцій Бесселя не перевищує одиниці, верхня межа суми рядів не перевищує:

- $P = 10$: $G_{(m_1)(z_1)(0)} \leq 1/(2P^2)$; $G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(2P^3)$;
- $P = 20$: $G_{(m_1)(z_1)(0)} \leq 1/(108P^2)$; $G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(108P^3)$;

$$- P = 30: G_{(m_1)(z_1)(0)} \leq 1/(750P^2); G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(750P^3).$$

Порівнюючи отримані верхні межі сум рядів сумою ряду $G_{m_1(0)}$, за умови $m_1 = 1$, можна зробити висновок, що їх значення співвимірні лише для параметра кратності модуляції $P = 10$. Для більших значень параметра P , ці суми можна не враховувати, або враховувати наближено.

Якщо різниця параметрів $z_1 - m_1 = 2$, значення функцій Бесселя істотно відрізняються від нуля у випадках, коли $z_1 + m_1 \geq 6$; для $P = 20 - z_1 + m_1 \geq 14$; для $P = 30 - z_1 + m_1 \geq 20$, тобто при значеннях $P = 10, z_1 = 4, m_1 = 2$; $P = 20, z_1 = 8, m_1 = 6$; $P = 30, z_1 = 11, m_1 = 9$. Оцінку сум рядів наведено нижче:

$$\begin{aligned} - P = 10: G_{(m_1)(z_1)(0)} &\leq 1/(32P^2); G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(32P^3); \\ - P = 20: G_{(m_1)(z_1)(0)} &\leq 1/(1728P^2); G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(1728P^3); \\ - P = 30: G_{(m_1)(z_1)(0)} &\leq 1/(8019P^2); G_{(m_1)(z_1)(1)} \leq -1/(8019P^3). \end{aligned}$$

Порівнюючи отримані значення, можна зробити висновок, що суми з різницею параметрів сумування більше одиниці, $z_1 - m_1 > 1$, можна не враховувати. Тому для значень модуляції $P > 20$ найбільший вклад у результат має сума $G_{m_1(0)}$ (4.14). Сума $G_{m_1(1)}$ (4.15) може враховуватись наближено для додаткового підвищення точності розрахунків:

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} G_{m_1(1)} \approx \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(\pi\mu)^2}{(m_1P)^4} = \frac{\pi^6\mu^2}{90P^4}. \quad (4.23)$$

Один доданок суми $G_{m_1(0)}$ також виражається в згорнутому виді:

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} G_{m_1(0)} \approx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - J_0(2m_1\pi\mu))}{2m_1^4P^2} = \frac{\pi^4}{180P^2} - \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{J_0(2m_1\pi\mu)}{2m_1^4P^2}. \quad (4.24)$$

Згідно з формулами (4.23) і (4.24) сума квадратів вищих гармонік має вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m_1} J_{2k-1-m_1P}(\pi\mu m_1) \right)^2 &\approx \sum_{m_1=1}^{\infty} (G_{m_0} + G_{m_1}) \approx \\ &\left(\frac{\pi^4}{180P^2} \left(1 + \frac{2(\pi\mu)^2}{P^2} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(2m_1\pi\mu)}{2m_1^4P^2} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для досягнення похибки 1 % у нескінченному ряді формули (4.25) достатньо взяти перші два члени:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m_1} J_{2k-1-m_1 P}(\pi \mu m_1) \right)^2 \approx \left(\frac{\pi^4}{180 P^2} \left(1 + \frac{2(\pi \mu)^2}{P^2} \right) - \sum_{m_1=1}^2 \frac{J_0(2m_1 \pi \mu)}{2m_1^4 P^2} \right). \quad (4.26)$$

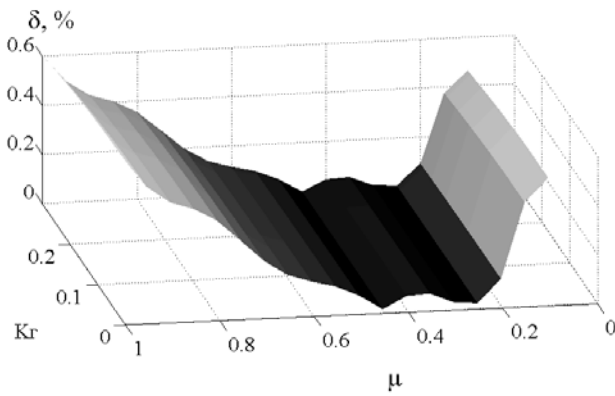
Отже формула для розрахунку коефіцієнта гармонік K_G у згорнутому виді є такою:

$$K_G = \frac{\frac{2}{\pi P} \sqrt{\frac{\pi^4}{180} \left(1 + \frac{2(\pi \mu)^2}{P^2} \right) - \frac{J_0(2\pi \mu)}{2} - \frac{J_0(4\pi \mu)}{32}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{1/(\omega_M \tau)^2 + 1} + \frac{4}{\pi^2 P^2} \left(\frac{\pi^4}{180} \left(1 + \frac{2(\pi \mu)^2}{P^2} \right) - \frac{J_0(2\pi \mu)}{2} - \frac{J_0(4\pi \mu)}{32} \right)}}. \quad (4.27)$$

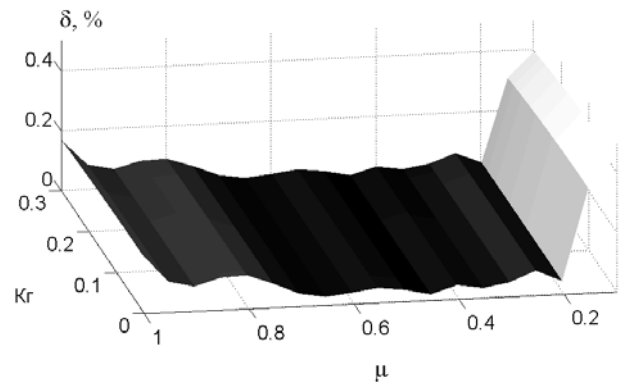
Оскільки в формулі немає операторів сумування, трудомісткість її розрахунків значно скоротиться. Аналогічно можна вивести формулу для коефіцієнта гармонік за умови використання фільтра другого [168] і вищих порядків.

4.1.2. Оцінка похибки та трудомісткості розрахунку коефіцієнта гармонік

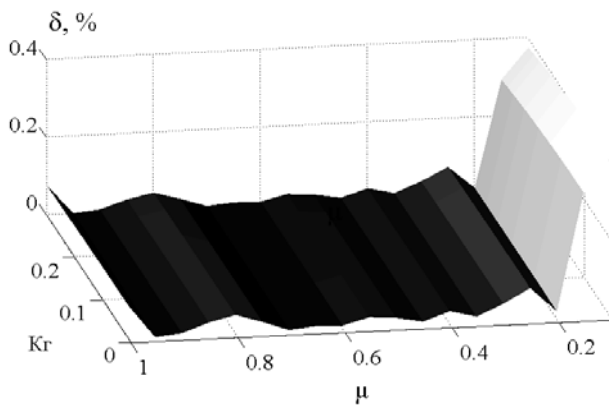
Оцінимо відносну похибку δ розрахунку коефіцієнта гармонік K_G за формулою (4.27) у порівнянні з формулою (4.3). Аналіз похибок проводиться у діапазоні глибини модуляції $\mu = 0.1..1$, для значення коефіцієнта гармонік $K_G = 0.01..0.3$, та значень кратності модуляції $P = 20, 50, 100, 200$. Графіки відносної похибки δ у просторі двох змінних K_G і μ для значень $P = 20, 50, 100, 200$ наведено на рис. 4.2, а, б, в і г відповідно.



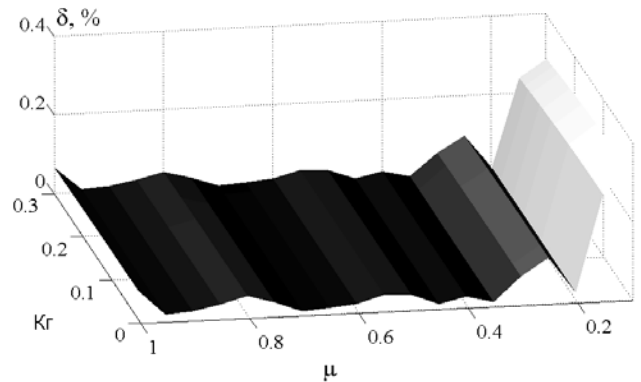
а)



б)



в)



г)

Рис. 4.2. Графіки відносної похибки δ у просторі двох змінних K_{Γ} і μ для значень:
а) $P = 20$; б) $P = 50$; в) $P = 100$; г) $P = 200$

Згідно з даними, наведеними на рис. 4.2, навіть при параметрі модуляції $P = 20$ для типових значень глибини модуляції $\mu = 0.1..1$ і коефіцієнта гармонік $K_{\Gamma} = 0.01..0.3$ відносна похибка не перевищує $\delta < 0.6 \%$. При збільшенні кратності модуляції максимальна відносна похибка зменшується, наприклад для $P = 200$ відносна похибка $\delta < 0.3 \%$, що свідчить про достатню точність розрахунку коефіцієнта гармонік за формулою (4.27).

Оцінимо кількість математичних операцій для розрахунку коефіцієнта гармонік за формулою (4.27): множення і ділення – 21; додавання і віднімання – 5; взяття кореня – 2.

Тепер оцінимо трудомісткість розрахунку коефіцієнта гармонік за звичайною формулою в часовій області:

$$K_r = \frac{\sqrt{U_\phi^2 - U_{1\phi}^2}}{U_\phi}, \quad (4.28)$$

де U_ϕ – діюче значення напруги після фільтра, $U_{1\phi}$ – діюче значення напруги першої гармоніки після фільтра.

Для розрахунку діючого значення напруги U_ϕ використовується масив вимірених значень $u_{\phi(1)} \dots u_{\phi(N)}$:

$$U_\phi = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{\phi(i)}^2}. \quad (4.29)$$

Розмір масиву N визначається згідно з теоремою Котельникова [169] і має складати мінімум $2P$, $N_{min} = 2P$. Однак, для досягнення необхідного значення точності, кількість має бути мінімум на порядок більшою $N_{nom} = 20P$.

Для розрахунку першої гармоніки $U_{\phi 1}$ доцільно використовувати ряд Фур'є однієї змінної. Коефіцієнти a_1 і b_1 , що відповідають косинусній і синусній складовим першої гармоніки, розраховуються за формулами [170]:

$$a_1 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} u_{\phi(i)} \cos\left(\frac{2\pi}{N} i\right); \quad (4.30)$$

$$b_1 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} u_{\phi(i)} \sin\left(\frac{2\pi}{N} i\right). \quad (4.31)$$

Діюче значення першої гармоніки розраховується за формулою:

$$U_{\phi 1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \quad (4.32)$$

Отже сумарна кількість операцій, необхідних для розрахунку коефіцієнта гармонік K_r за формулою (4.28) з урахуванням формул (4.29)-(4.32), складає: множення і ділення – $40P+5$; додавання і віднімання – $40P+2$; взяття кореня – 2.

Порівнюючи трудомісткість розрахунку коефіцієнта гармонік за формулами (4.27) і (4.28), можна зробити висновок про значне зменшення трудомісткості на основі отриманої формули, особливо для великих значень кратності модуляції. Співвідношення між сумарною кількістю операцій за звичайною формулою і запропонованою *Rel*, за виключенням операцій взяття кореня, кількість яких співпадає, складає:

$$Rel = \frac{80P + 7}{26}. \quad (4.33)$$

Зменшення трудомісткості досягається вже при значенні $P = 1$, а при $P = 100$, кількість математичних операцій зменшується в $Rel = 308$ разів, що значно зменшує вимоги для обчислювального ядра системи керування при розрахунках у реальному масштабі часу.

Однак, безпосереднє використання формули (4.37) дає можливість лише оцінити значення коефіцієнта гармонік. Тоді як на практиці доцільніше задавати бажане значення параметра якості електроенергії і досягати його шляхом регулювання параметра кратності модуляції P , для чого необхідно сформулювати принцип керування за значенням параметра якості електроенергії та синтезувати систему керування на його основі.

4.1.3. Синтез системи керування кратністю модуляції P за значенням коефіцієнта гармонік

Як правило, система керування інвертором з вихідною синусоїдальною напругою стабілізує діюче значення вихідної напруги без контролю значення параметрів якості. Якщо ж забезпечити регулювання кратності модуляції P , то на основі рівняння (4.27), також можливо стабілізувати значення параметра якості електроенергії, в даному випадку коефіцієнта гармонік.

Для цього у формулу (4.27) необхідно підставити бажане значення коефіцієнта гармонік і з отриманого рівняння виразити кратність модуляції P , після чого отримаємо квадратне рівняння:

$$c_2 x^2 + c_1 x - c_0 = 0, \quad (4.34)$$

$$\text{де } c_2 = \frac{2\pi^4 \mu^2}{45} (1 - K_F^2), \quad c_1 = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi^4}{180} - \frac{J_0(2\pi\mu)}{2} - \frac{J_0(4\pi\mu)}{32} \right) (1 - K_F^2),$$

$$c_0 = \frac{\mu^2}{1/(\omega_M \tau)^2 + 1} K_F^2, \quad x = \frac{1}{P^2}.$$

Значення параметра кратності модуляції P , отримане з рівняння (4.34), є таким:

$$P = \frac{\sqrt{2c_2}}{\sqrt{-c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2c_0}}}. \quad (4.35)$$

Формула для розрахунку кратності модуляції (4.35) дозволяє реалізувати принцип керування за значенням параметрів якості електроенергії як задавальної дії. Цей принцип реалізовано для синтезу системи керування в середовищі MatLab Simulink® [171] для мостової схеми інвертора, показаної на рис. 4.3.

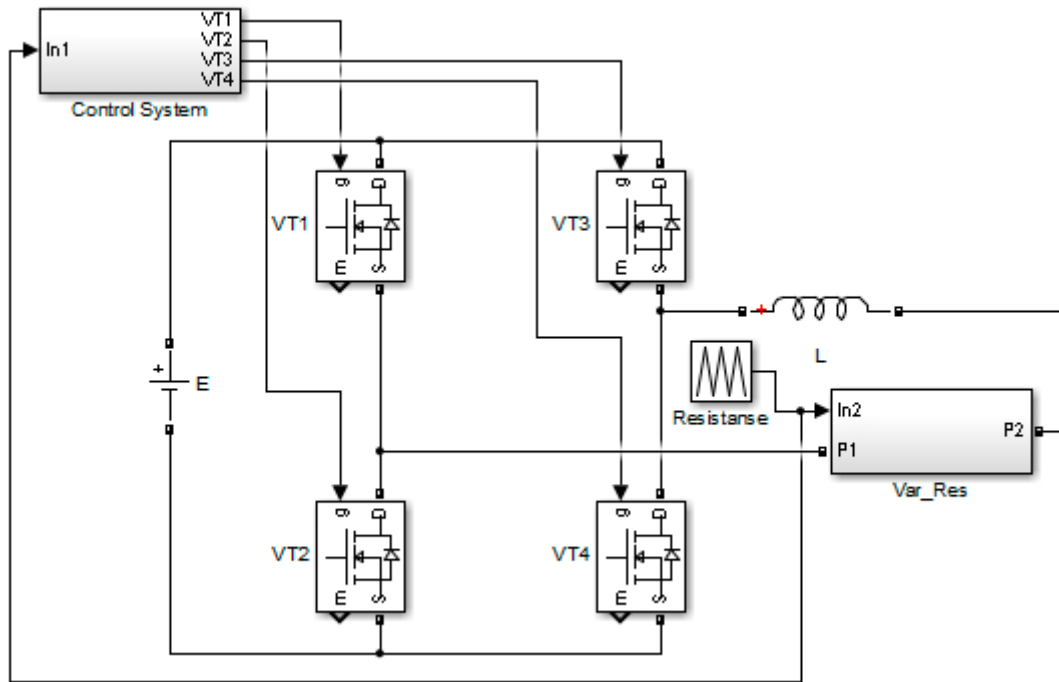


Рис. 4.3. Simulink модель мостової схеми інвертора

Силова частина моделі інвертора складається з транзисторів VT1-VT4, індуктивного фільтра з індуктивністю L та навантаження на основі блока змінного резистора Var_Res, значення якого задається блоком Resistance. Значення з блоку Resistance також подається на вхід системи керування інвертором Control system. У цьому блоці на основі значення опору навантаження з блоку Resistance розраховується кратність модуляції напруги і формується відповідний ШІМ сигнал керування транзисторами інвертора.

Діаграми роботи моделі показано на рис. 4.4.

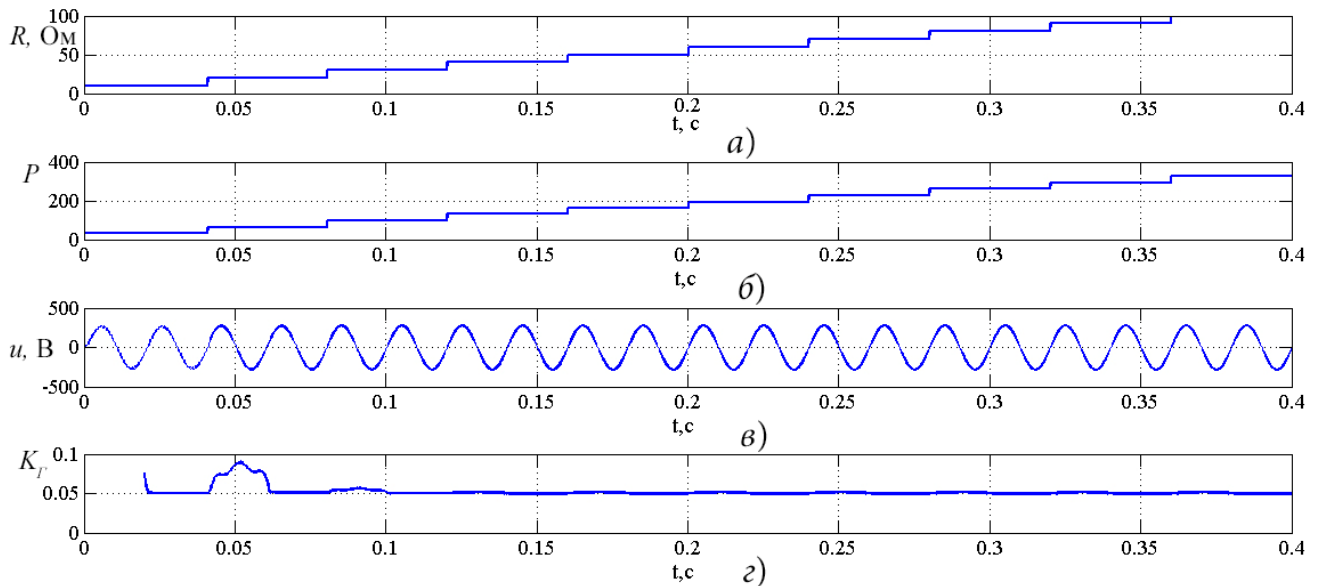


Рис. 4.4. Часові діаграми роботи системи керування кратністю модуляції: а) часова діаграма зміни опору навантаження R ; б) часова діаграма зміни кратності модуляції P ; в) часова діаграма напруги навантаження u ; г) часова діаграма коефіцієнта гармонік K_G

З часових діаграм, наведених на рис. 4.4, можна зробити висновок, що система керування одразу після зміни опору навантаження R змінює значення кратності модуляції P для забезпечення стабільного значення коефіцієнта гармонік. Однак на наступному періоді напруги мережі коефіцієнт гармонік дещо збільшується через виникнення перехідного процесу, але вже через період знову стабілізується на бажаному рівні – в даному випадку на значенні $K_G = 5\%$, для чого кратність модуляції змінювалась в діапазоні $P = 32..324$. Тому отриманий принцип керування для режимів роботи інвертора у режимі з максимальним навантаженням дозволяє зменшити динамічні втрати інвертора на порядок.

4.2. Однофазний інвертор з гальванічною розв'язкою із покращеними масогабаритними показниками

Інвертори з гальванічною розв'язкою та вихідною синусоїдальною напругою, як правило, працюють на частоті вихідної напруги [172]. У цьому випадку на виході інвертора формується імпульсна напруга, модульована за законом ШІМ, після чого напруга подається на низькочастотний (НЧ) фільтр, який придушує високочастотні гармоніки, і відфільтрована напруга подається на вхід мережевого трансформатора.

Недоліком описаної топології, рис. 4.5, а, є значні габарити мережевого трансформатора та інвертора в цілому.

Для зменшення габаритів трансформатора доцільно забезпечити передавання енергії на проміжній підвищеній частоті. У цьому випадку низькочастотний фільтр встановлюється безпосередньо перед навантаженням. Хоча така топологія потребує встановлення додаткової ланки перетворення енергії, її сумарні габарити є значно меншими [173, 174]. Структурна схема однієї з топологій, що дозволяє використовувати високочастотний трансформатор показана на рис. 4.5, б.

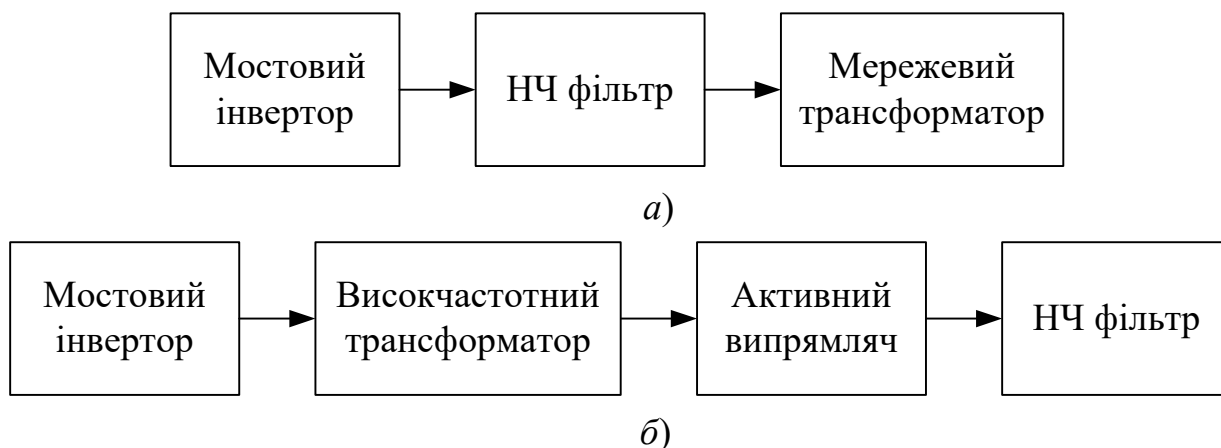


Рис. 4.5. Топології інверторів з синусоїдальною напругою: а) з мережевим трансформатором, б) з високочастотним трансформатором

Зрозуміло, що для формування високочастотної напруги на вході трансформатора необхідно передавати енергію на проміжній підвищеній частоті, для чого доцільно використовувати спеціалізовані закони модуляції, що мінімізують наявність низькочастотних складових, які підмагнічують трансформатор. Якщо взяти як базовий тип модуляції ШІМ, то при інвертуванні полярності кожного другого імпульсу модуляції, отримується напруга, зображена на рис. 4.6, а зі спектром, зображеним на рис. 4.6, б.

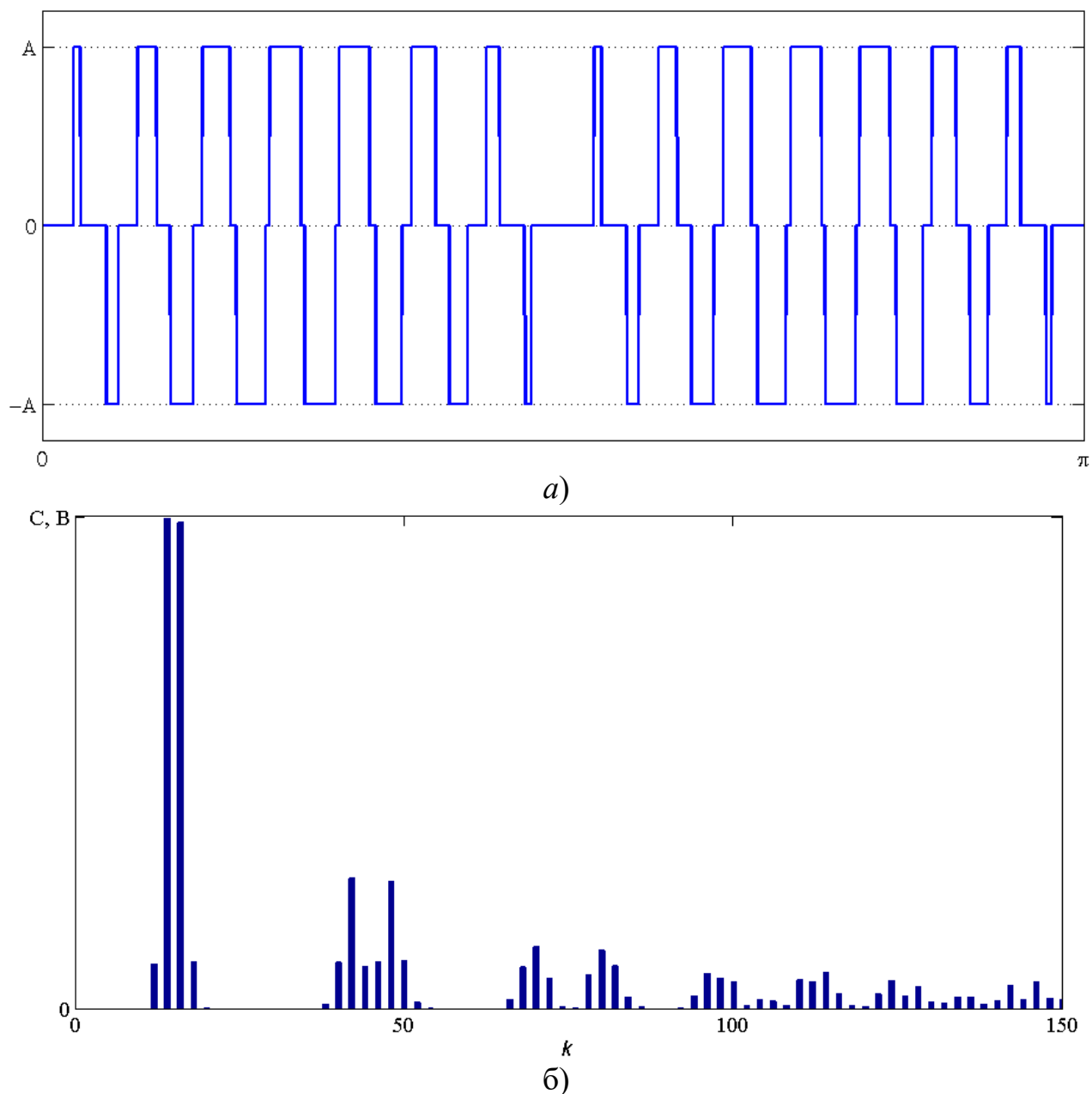


Рис. 4.6. ШІМ напруга з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу а) і її спектр б)

Як видно з діаграми спектра, зображеної на рис. 4.6, б, ненульові гармоніки модульованої напруги сконцентровані в околі проміжної частоти та правіше неї, а значення першої гармоніки близьке до нуля, що дозволяє зменшити габарити трансформатора при роботі на проміжній підвищеній частоті.

Через неоднакові ширини імпульсів напруги трансформатор переважно перемагнічується по частинній петлі гістерезису, тому його потужність використовується не повністю [175]. У випадку використання ЧІМ з постійною

тривалістю імпульсу $t_i = \text{const}$ трансформатор перемагнічується по граничній петлі гістерезису, що мінімізує його габарити. За умови використання запропонованого типу модуляції кількість імпульсів на одному періоді модулюючої напруги P залежить від вихідної потужності та коефіцієнта гармонік і може змінюватись з часом, що передбачає використання програмних методів модуляції з динамічною зміною параметрів [176-181].

Для аналізу особливостей формування напруги за законом ЧІМ розглянемо спрощену принципову схему силової частини інвертора та часові діаграми його роботи, показані на рис. 4.7, а і б-г відповідно.

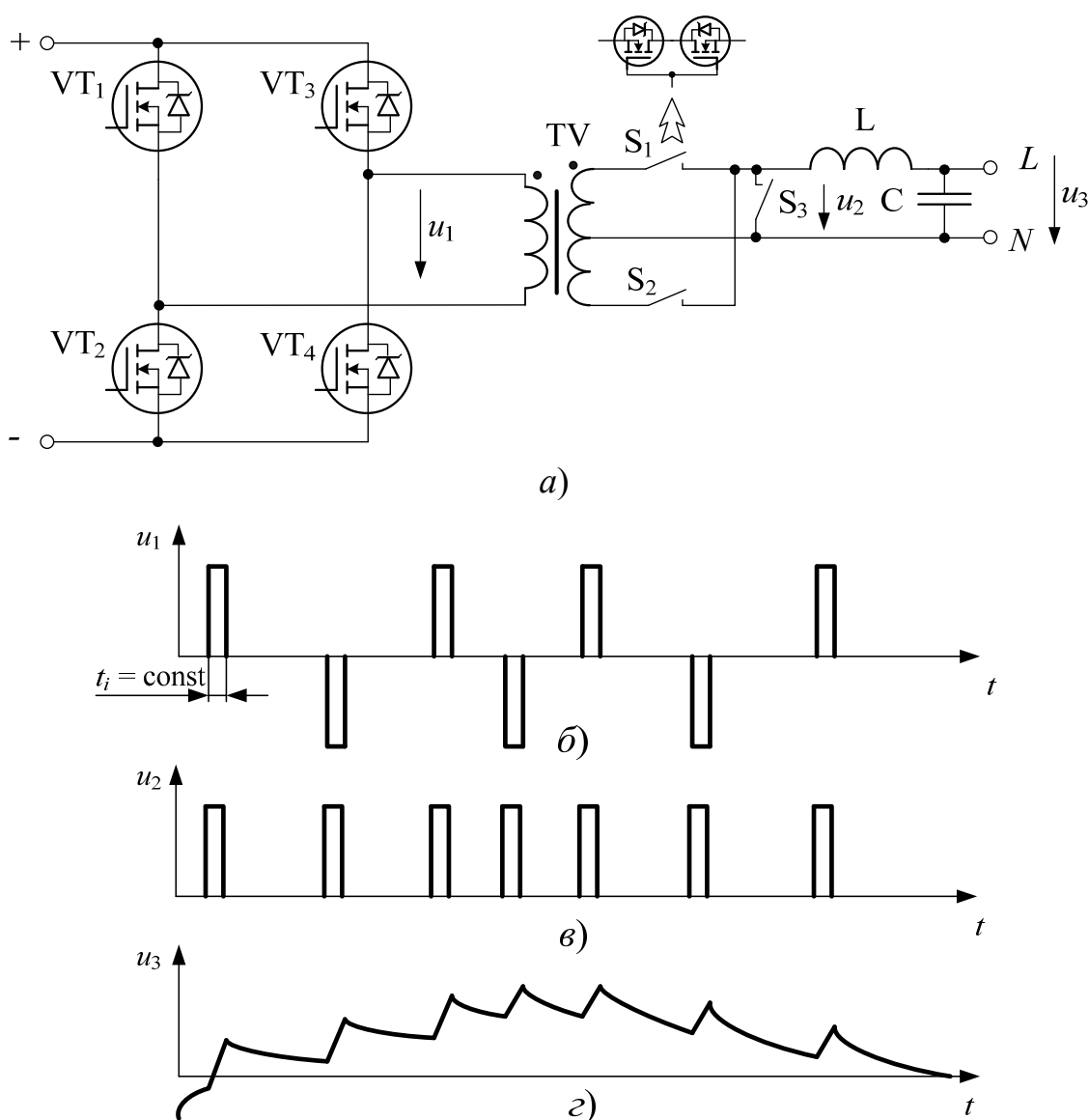


Рис. 4.7. Схема інвертора з гальванічною розв'язкою а) та часові діаграми його роботи: б) напруга на вході трансформатора; в) напруга на виході активного випрямляча; г) напруга на виході фільтра

Згідно з рис. 4.7, а і б постійна вхідна напруга інвертується мостовим інвертором на транзисторах VT_1 - VT_4 і перетворюється на біполярну напругу u_1 , рис. 4.7, б, модульовану за законом ЧІМ з постійною тривалістю імпульсу $t_i = \text{const}$. Ця напруга передається через трансформатор TV і випрямляється на виході, напруга u_2 , рис. 4.7, в. Після згладжування фільтром утворюється напруга u_3 близька до синусоїдальної, рис. 4.7, г [182-185].

Проаналізуємо спектр напруги на вході трансформатора і на виході фільтра. Використання узагальненого ряду Фур'є для вирішення цієї задачі містить крок перетворення змінної часу $t^* = f(t)$, після застосування якого модульований сигнал має постійне значення кратності модуляції $P^* = \text{const}$. Розглянемо принцип формування двополярної ЧІМ та виведемо закон перетворення змінної часу $t^* = f(t)$ для цього закону модуляції.

4.2.1. Закон перетворення змінної часу

Закон перетворення змінної часу полягає у знаходженні такої функціональної залежності між реальною змінною часу t і новою t^* , $t^* = f(t)$, що в просторі нової змінної часу t^* базовий сигнал перетвориться на сигнал із заданими властивостями. Найпростіший вираз для базового сигналу досягається для другого роду модуляції, ШІМ-II. Отримання модуляції типу ЧІМ з інвертуванням кожного другого імпульсу з базової модуляції ШІМ-II здійснюється у два кроки:

- застосування до отриманої модульованої напруги перетворення змінної часу $t^* = f(t)$;
- інвертування полярності кожного другого імпульсу модульованої напруги.

Первинна форма напруги, модульована за законом ШІМ-II, та напруга після перетворення змінної часу показані на рис. 4.8, а і б відповідно, модульована напруга після інвертування полярності кожного другого імпульсу показана на рис. 4.8, в.

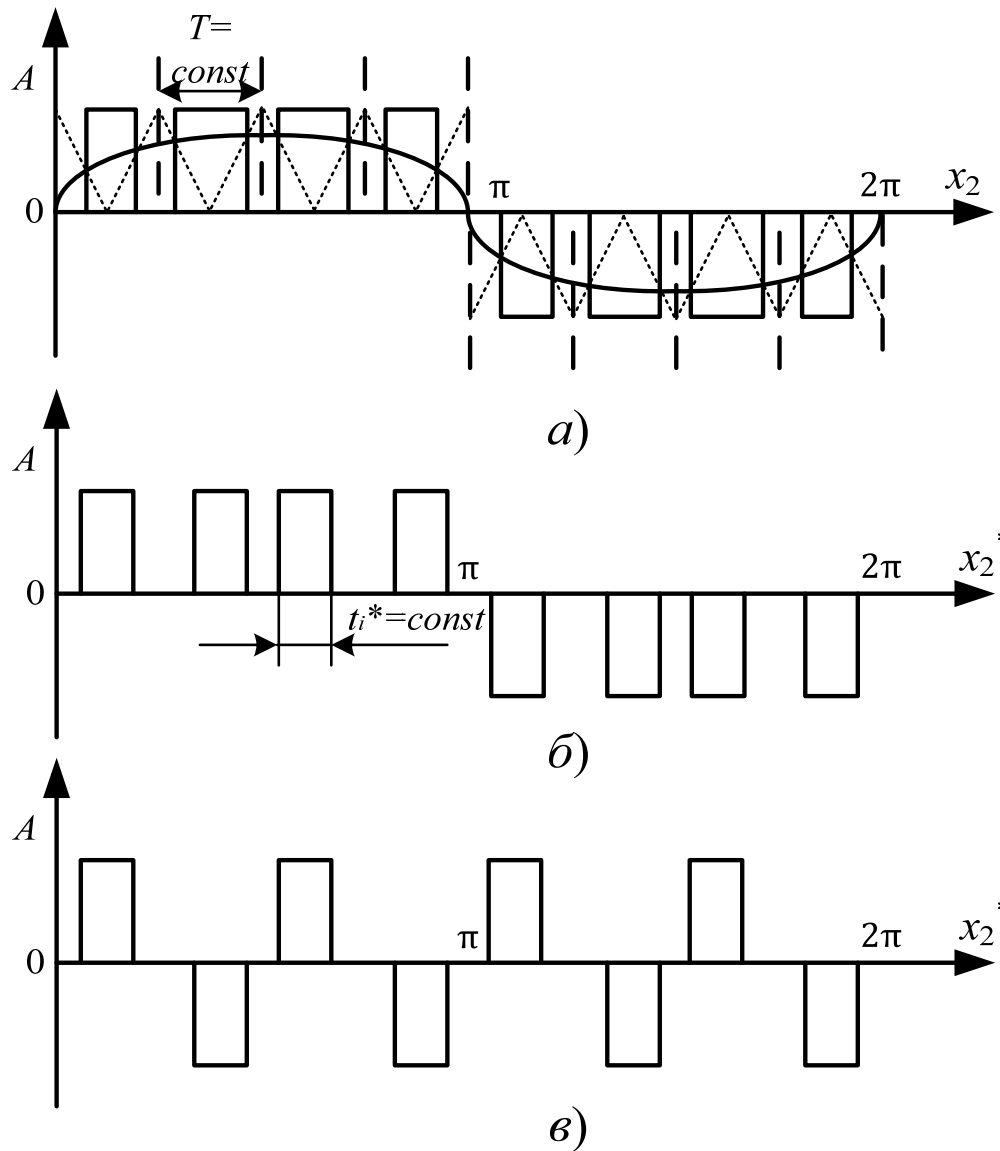


Рис. 4.8. Ілюстрація до формування ЧІМ сигналу: а) базовий сигнал з модуляцією ШІМ-II; б) ЧІМ сигнал; в) ЧІМ сигнал з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу

За умови переходу до ЧІМ, тривалість імпульсу є постійною $t_i = \text{const}$, а довжина періода носійної функції T_i^* за умови синусоїдальної модулюючої функції $F = \sin(\omega_M t^*)$ на інтервалі i :

$$T_i^* = \frac{t_i^*}{\sin(\omega_M t^*)}, \quad (4.36)$$

де ω_M – кутова частота модулюючої функції.

Приріст змінної часу Δt^* на кожному наступному періоді носійної визначається тривалістю періода T_i^* . За умови переходу до змінної Δx_2^* , вираз (4.36) перетвориться до виду:

$$\Delta x_{2i}^* = \frac{x_{2i}^*}{\sin(x_2^*)}. \quad (4.37)$$

Тривалість імпульсу Δx_{2i}^* є постійною, $\Delta x_{2i}^* = \text{const}$, і пропорційна приросту періоду ШІМ базового сигналу Δx_2 :

$$x_{2i}^* = C \Delta x_2, \quad (4.38)$$

де C – константа.

Підставивши вираз (4.38) у (4.37), отримаємо:

$$\Delta x_{2i}^* = \frac{C \Delta x_2}{\sin(x_2^*)}. \quad (4.39)$$

Для достатньо великої кратності модуляції P можна вважати, що зміна аргументу модулюючої функції на кожному наступному періоді носійної функції змінюється несуттєво, тобто $\Delta x_2 \rightarrow 0$, $\Delta x_2^* \rightarrow 0$. У цьому випадку вираз (4.39) можна перетворити на диференціальне рівняння:

$$\sin(x_2^*) dx_2^* = C dx_2. \quad (4.40)$$

Проінтегрувавши обидві частини диференціального рівняння (4.40), отримаємо:

$$-\cos(x_2^*) = C x_2 + C_1, \quad (4.41)$$

де C_1 – стала інтегрування.

Сталі інтегрування C і C_1 розраховуються з використанням початкових умов $x_2^*(0) = 0$, $x_2^*(\pi/2) = \pi/2$: $C_1 = -1$, $C = -2C_1 / \pi = 2 / \pi$.

Підставивши розраховані значення сталих інтегрування C і C_1 у рівняння (4.41) і виразивши змінну x_2^* через x_2 , отримаємо:

$$x_2^* = \arccos(1 - 2x_2 / \pi). \quad (4.42)$$

Зворотна залежність є такою:

$$x_2 = \pi(1 - \cos(x_2^*)) / 2. \quad (4.43)$$

Вираз (4.42) дає можливість розрахувати тривалість імпульсу ЧІМ. Для цього використовується значення тривалості імпульсу ШІМ в точці $\pi/2$ відносно змінної x_1 :

$$x_{1i}(\pi/2) = 2\pi\mu. \quad (4.44)$$

Знаючи тривалість імпульсу по координаті x_1 , значення тривалості по координаті x_1^* розраховується за формулою:

$$x_{1i}^*(\pi/2) = x_{1i}(\pi/2) \frac{dx_2^*}{dx_2} \Big|_{x_2 = \pi/2} = 2\pi\mu \cdot \frac{2}{\pi} = 4\mu. \quad (4.45)$$

Отже тривалість імпульсу ЧІМ на всьому періоді модулюючої функції складає $x_{1i}^* = 4\mu$. Використаємо узагальнений ряд Фур'є для розрахунку спектра однополярної ЧІМ напруги після перетворення змінної часу $t^* = f(t)$.

4.2.2. Спектр однополярної ЧІМ

Спектральні складові $C_{(m_1)(m_2)}^+$ однополярної ЧІМ утворюються з формули спектральних складових $C_{(m_1)(m_2)}^*$ базового сигналу ШІМ-II.

$$C_{(m_1)(m_2)}^+ = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} A(x_2) \int_{\pi(1-\gamma(x_2))}^{\pi(1+\gamma(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2, \quad (4.46)$$

де γ – коефіцієнт заповнення імпульсів.

Коефіцієнт заповнення імпульсів $\gamma(x_2)$ розраховується з використанням формули перетворення змінної x_2^* , $x_2^* = f(x_2)$, (4.42):

$$\gamma(x_2) = \mu \cdot \sin(x_2^*(x_2)) = \mu \cdot \sin(\arccos(1 - 2x_2/\pi)). \quad (4.47)$$

Після підстановки виразу (4.47) у формулу (4.46) отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)}^* = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu \sin(\arccos(1-2x_2/\pi)))}^{\pi(1+\mu \sin(\arccos(1-2x_2/\pi)))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1-\mu \sin(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)))}^{\pi(1+\mu \sin(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (4.48)$$

При переході до однополярної ЧІМ ширина імпульсів на кожному періоді носійної функції є постійною і розраховується за формулою (4.47). Зміщення імпульсів ЧІМ здійснюється по двом змінним x_1 і x_2 . По змінній x_2 на кут $\varphi_{x_2} =$

$(x_2^*(x_2) - x_2)$ і по змінній x_1 на кут $\varphi_{x1} = P x_2^*(x_2) - x_2$. Виведення формул аналітичних виразів спектральних компонент однополярної ЧІМ $C_{(m1)(m2)}^+$, з урахуванням властивостей поліномів Чебишева [186, 187], наведено у додатку Г, нижче наведено остаточні вирази:

$$C_{(m1)(2m2)}^+ = 0;$$

$$C_{(m1)(2m2-1)}^+ = \frac{2A(-1)^{m1} \sin(m1 2\mu)}{m1 \pi^2} \left(\int_0^\pi T_{2m2-1+m1P} \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right) e^{-jm1Px_2} dx_2 + \right. \\ \left. + j \int_0^\pi \sqrt{1 - T_{2m2-1+m1P}^2 \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right)} e^{-jm1Px_2} dx_2 \right); \quad (4.49)$$

$$C_{0(2m2-1)}^+ = \frac{4H\mu}{\pi^2} \left(\int_0^\pi T_{2m2-1} \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right) dx_2 + j \int_0^\pi \sqrt{1 - T_{2m2-1}^2 \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right)} dx_2 \right),$$

де T_n – поліном Чебишева першого роду порядку n [186, 187].

Напруга з однополярною ЧІМ і його спектр зі значенням параметрів $P = 20$, $\mu = 0.9$, $A = 1$ показано на рис. 4.9, а і б відповідно.

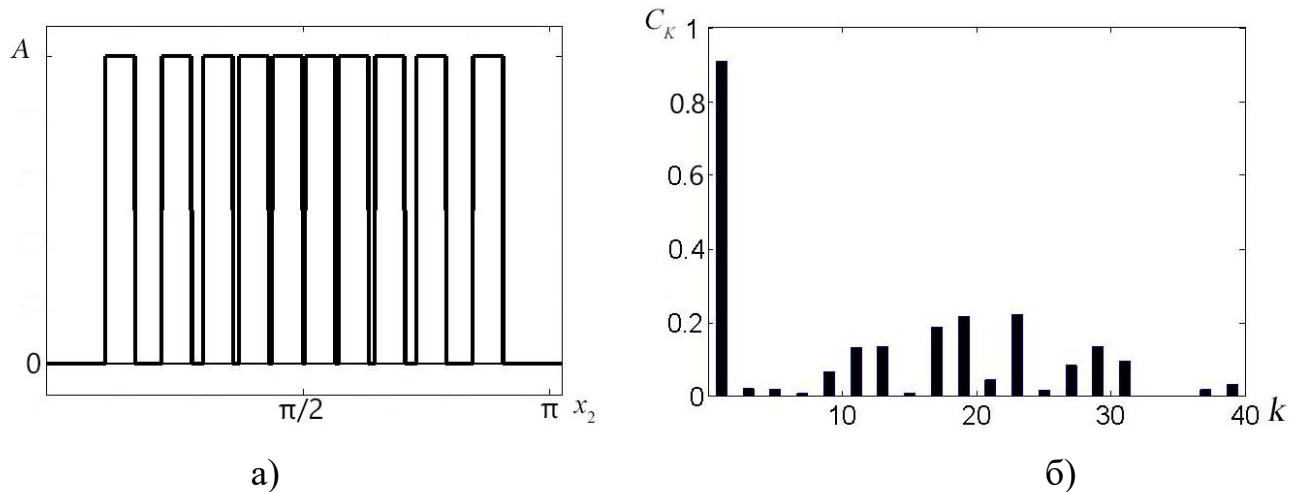


Рис. 4.9. Напруга з однополярною ЧІМ а) та її спектр б)

У порівнянні з ШІМ-II напругою, спектр ЧІМ дещо більше «розмазаний» в області проміжної частоти, тому для отримання необхідного значення коефіцієнта гармонік, вихідний фільтр повинен мати меншу частоту зрізу. Тепер розглянемо спектр ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу.

4.2.3. Спектр ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу

Спектр ЧІМ з інвертуванням кожного другого імпульсу розраховується на основі базового модульованого сигналу з ШІМ-II, наведеного на рис. 4.10, а. У базовому сигналі інвертується полярність кожного другого імпульсу, рис 4.10, б. Далі цей сигнал розкладається на два модульованих сигнали, наведених на рис. 4.10, в і г. Ці сигнали мають вдвічі меншу кратність модуляції $P^* = P / 2$ при такій же залежності модулюючої функції $x_2^* = x_2$. Тому значення змінної x_1^* зменшується в два рази, $x_1^* = P^* x_2^* = P x_2 / 2$, також зменшується значення параметра глибини модуляції $\mu^* = \mu / 2$. Далі до цих сигналів застосовується закон перетворення змінної часу $t^* = f(t)$. Розглянемо особливості модуляції сигналів, наведених на рис. 4.10, в і рис. 4.10, г.

Сигнал, зображений рис. 4.10, в, на першій половині періода, $x_2^* = 0.. \pi$, модулюється відносно точок $x_1^* = \pi/2 + 2\pi t$, на другій половині періода, $x_2^* = \pi..2\pi - x_1^* = 3\pi/2 + 2\pi t$. Відмінність модульованого сигналу? зображеного на рис. 4.10, г у порівнянні з рис. 4.10, в полягає у тому, що на першій половині періода, $x_2^* = 0.. \pi$, сигнал модулюється відносно точок $x_1^* = 3\pi/2 + 2\pi t$, на другій половині періода, $x_2^* = \pi..2\pi - x_1^* = \pi/2 + 2\pi t$.

Формули для розрахунку спектральних складових першого модульованого сигналу $C_{(m_1)(m_2)1}$ є такими:

$$C_{(m_1)(m_2)1} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu \sin(\arccos(1-2x_2/\pi)))}^{\pi(1+\mu \sin(\arccos(1-2x_2/\pi)))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(3-\mu \sin(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)))}^{2\pi \pi(3+\mu \sin(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (4.50)$$

Після застосування функції перетворення часу $t^* = f(t)$, отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)1}^+ = \frac{A \sin(m_1 \mu)(j)^{m_1}}{m_1 \pi^2} (1 - (-1)^{m_1 + m_2}) \times \\ \times \int_0^{\pi} e^{j(m_2 (\arccos(1-2x_2/\pi)) + m_1 P(\arccos(1-2x_2/\pi) - y))} dx_2. \quad (4.51)$$

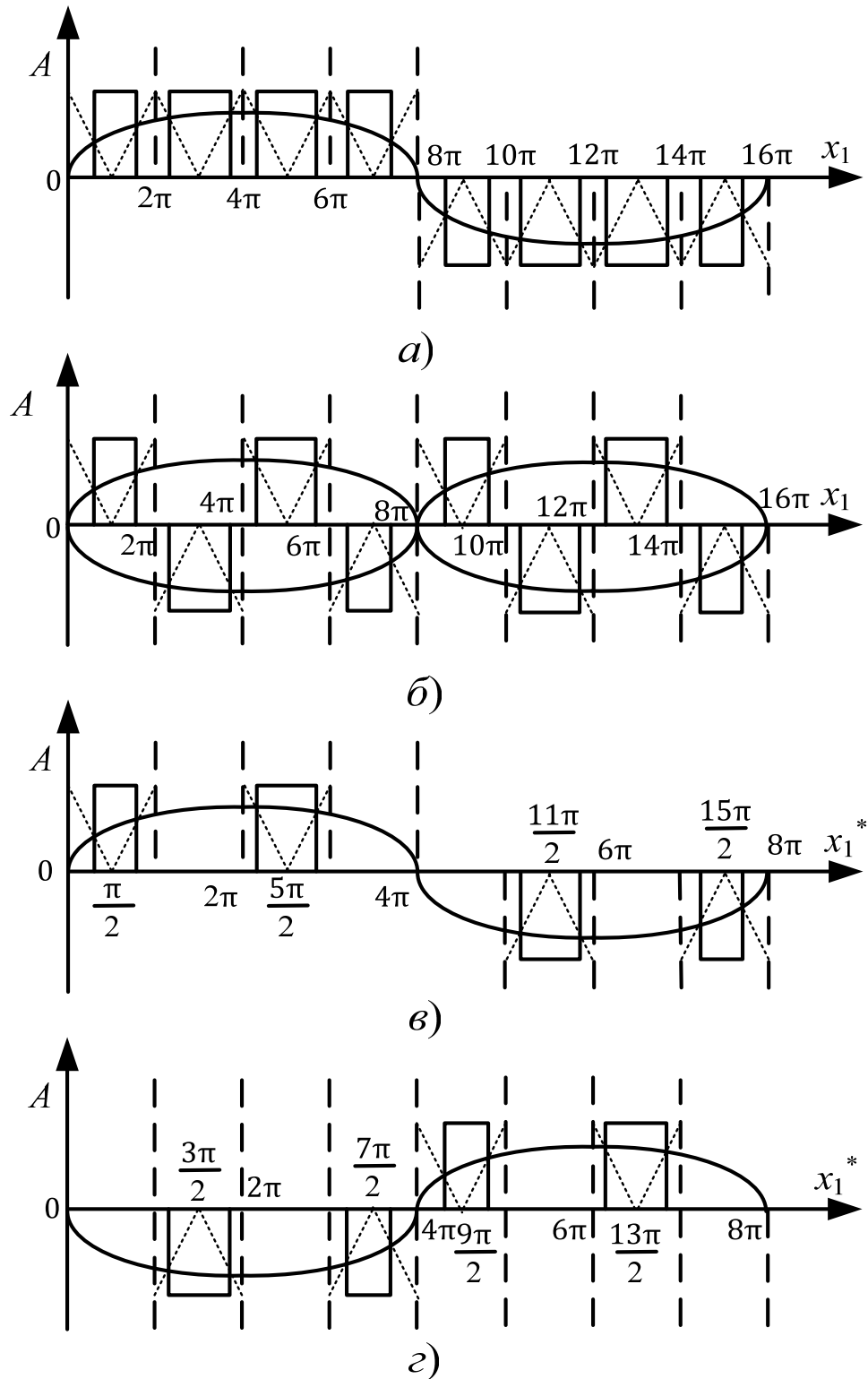


Рис. 4.10. Ілюстрація до розрахунку спектра ЧІМ з інвертуванням кожного другого імпульсу напруги: а) базовий ШІМ-ІІ сигнал; б) ШІМ-ІІ сигнал з інвертуванням кожного другого імпульсу; в) і г) однополярні модульовані сигнали, суперпозиція яких утворює ШІМ-ІІ сигнал з інвертуванням кожного другого імпульсу

Після усунення невизначеності у формулі (4.51) при $m_1 = 0$, спектральна компонента $C^+_{(0)(m_2)1}$ має вид:

$$\begin{aligned}
 C^+_{(0)(m_2)1} &= \frac{\mu A}{\pi^2} \left(\int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)))} dx_2 - \right. \\
 &\quad \left. - \int_\pi^{2\pi} e^{j(m_2(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)+\pi))} dx_2 \right) = \\
 &= \frac{\mu A}{\pi^2} (1 - (-1)^{m_2}) \int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)))} dx_2.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Формули для розрахунку спектральних складових другого модульованого сигналу, зображеного на рис. 4.10, г є подібними:

$$\begin{aligned}
 C^+_{(m_1)(m_2)2} &= -\frac{A \sin(m_1 \mu)(j)^{m_1}}{m_1 \pi^2} ((-1)^{m_1} - (-1)^{m_2}) \times \\
 &\times \int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)) + m_1 P(\arccos(1-2x_2/\pi) - y))} dx_2;
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 C^+_{(0)(m_2)2} &= -\frac{\mu A}{\pi^2} \left(\int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)))} dx_2 - \right. \\
 &\quad \left. - \int_\pi^{2\pi} e^{j(m_2(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)+\pi))} dx_2 \right) = \\
 &= -\frac{\mu A}{\pi^2} (1 - (-1)^{m_2}) \int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)))} dx_2.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Спектр напруги з двополярною модуляцією є сумою спектрів двох сигналів:

$$\begin{aligned}
 C^+_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A \sin(m_1 \mu)(j)^{m_1}}{m_1 \pi^2} (1 - (-1)^{m_1+m_2} - (-1)^{m_1} + (-1)^{m_2}) \times \\
 &\times \int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)) + m_1 P(\arccos(1-2x_2/\pi) - y))} dx_2;
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$C^+_{0n} = C^+_{0n1} + C^+_{0n2} = 0.$$

Вираз (4.55) не дорівнює нулю за умови парних m_2 , $m_2 = 2k$ і непарних m_1 , $m_1 = 2k + 1$:

$$C_{(2m_1-1)(2m_2)}^+ = -\frac{4jA \sin((2m_1-1)\mu)}{(2m_1-1)\pi^2} \times \int_0^\pi e^{j(2m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)) + (2m_1-1)P(\arccos(1-2x_2/\pi) - x_2))} dx_2. \quad (4.56)$$

Сигнал з ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу і його спектр зі значеннями параметрів $P = 20$, $\mu = 0.9$, $A = 1$ показано на рис. 4.11, а і б відповідно.

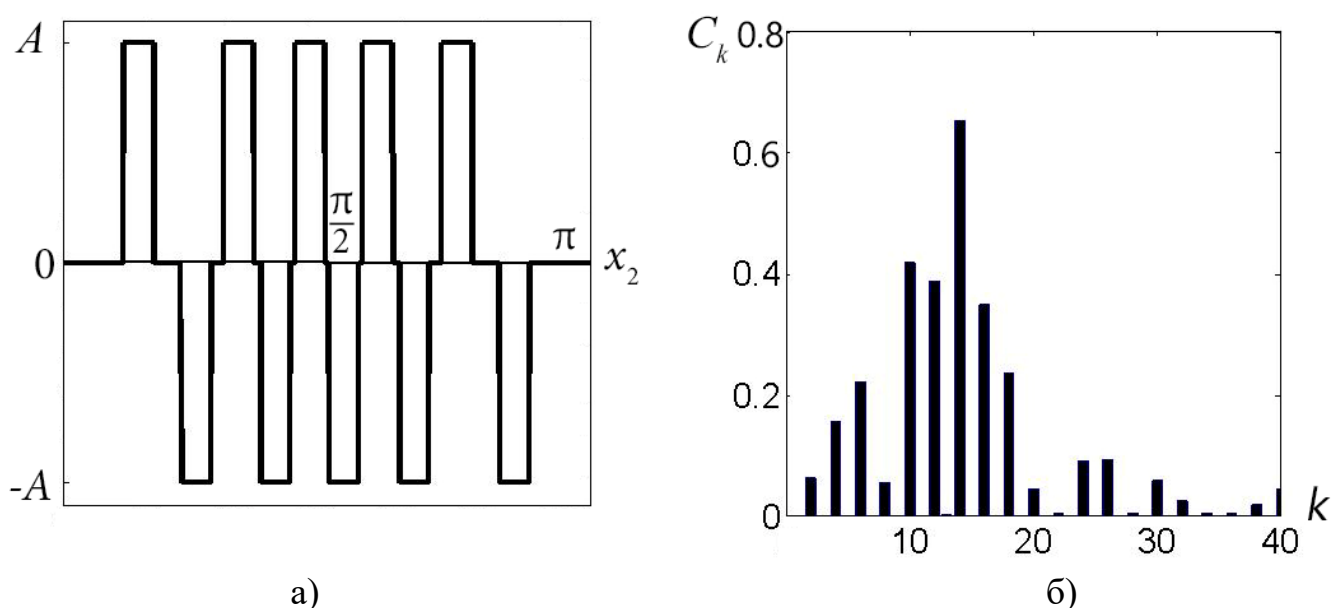


Рис. 4.11. Сигнал ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу: а) в часовій області, б) в частотній області

Як видно з рис. 4.11, б спектральна характеристика ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу має максимальні значення на частоті носійної функції.

4.2.4. Аналіз режимів роботи ЧІМ інвертора з гальванічною розв'язкою

Основною перевагою роботи інвертора з гальванічною розв'язкою з ЧІМ є зменшення ширини імпульсу напруги у порівнянні з максимальною шириною імпульсу ШІМ при тій же кратності модуляції P , що дозволяє у стільки ж разів зменшити потужність трансформатора [188].

Ступінь зменшення габаритів трансформатора G розраховується на основі формули (3.15) через співвідношення приростів диференціалів аргументів x_2^* ШІМ і ЧІМ x_2 у точці $x_2 = \pi/2$, що відповідає максимальній ширині імпульсу ШІМ.

$$G = \frac{dx_2}{dx_2^*} = c_1(c_2 \sin(x_2 = \pi/2) + 1) = c_1(c_2 + 1). \quad (4.57)$$

Оскільки коефіцієнти c_1 і c_2 залежать від глибини модуляції μ , значення параметра G є змінним параметром, функція якого наведена на рис. 4.12.

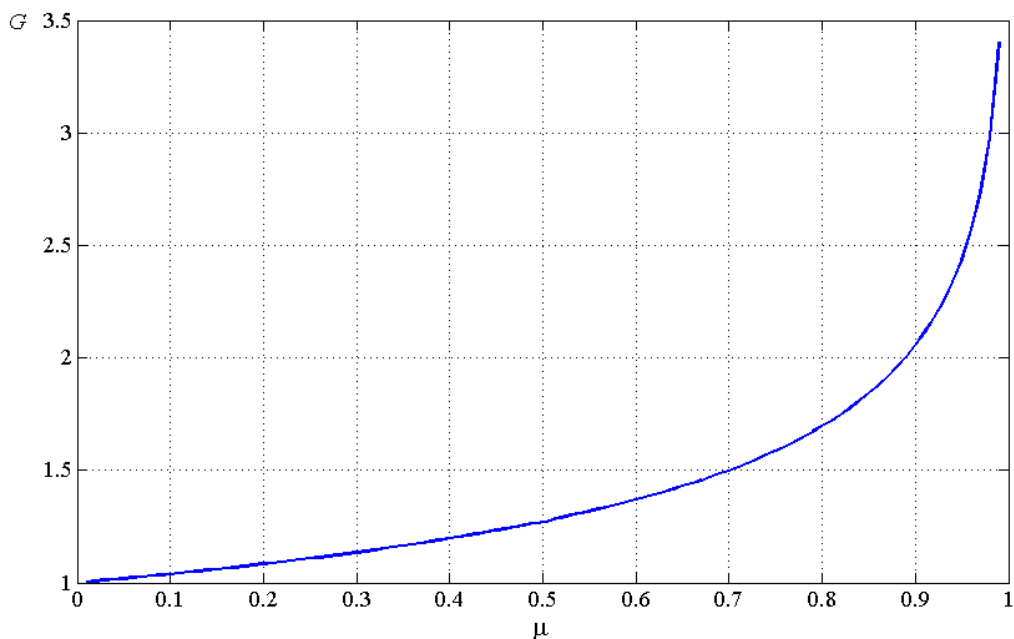


Рис. 4.12. Залежність параметра G від глибини модуляції μ

На основі отриманої залежності можна зробити висновок, що істотний вигрaш в потужності трансформатора $G = 1.25..3$ досягається при $\mu > 0.5$. Зрозуміло, що фільтрування ЧІМ напруги при тій же кратності модуляції потребує більших габаритів вихідного фільтра і сумарні масогабаритні показники перетворювача зменшаться не так істотно. Оцінка якості напруги на виході фільтра з ЧІМ зроблена на основі моделі MatLab Simulink®, зображений на рис. 4.13.

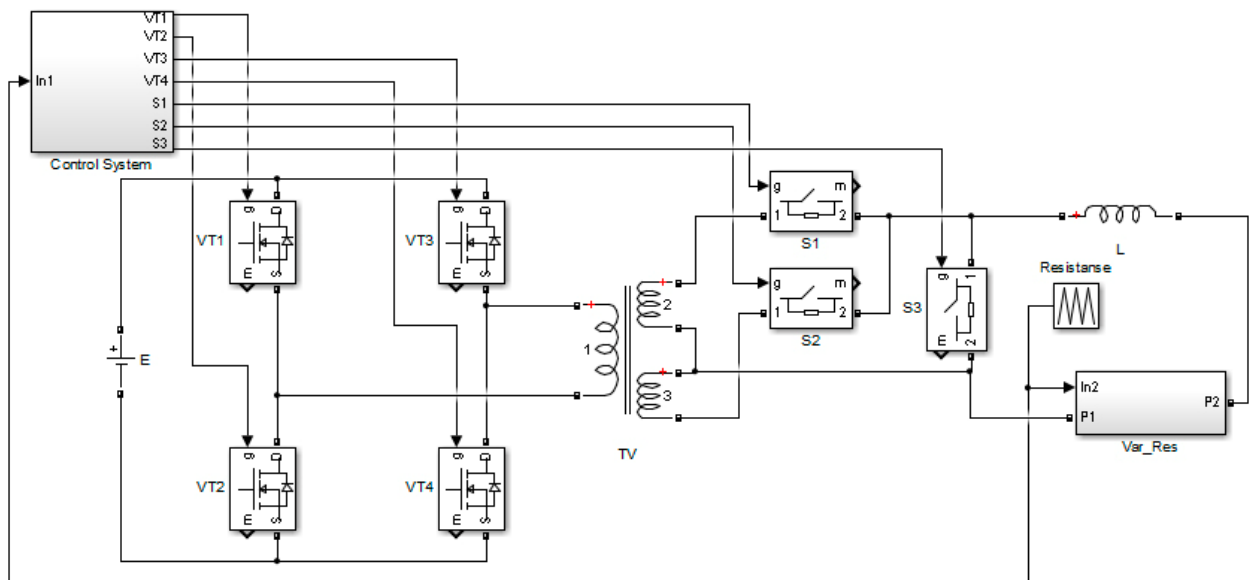


Рис. 4.13. Модель інвертора з гальванічною розв'язкою в MatLab Simulink®

У моделі, зображеній на рис. 4.13, транзистори VT1-VT4 використовуються для формування ЧІМ напруги з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу, рис. 4.11, а, яка подається на вхід трансформатора TV. На виході трансформатора встановлено активний випрямляч на двопровідних ключах S1, S2, який формує однополярну ЧІМ напругу, рис. 4.9, а, ключ S3 виконує роль нульового діода. Після згладження дроселем L на навантаженні формується близька до синусоїдальної напруга. Як навантаження використовується блок змінного опору Var_Res.

Для оцінки впливу запропонованого метода модуляції на параметри якості вихідної напруги використаємо формулу для розрахунку кратності модуляції P (4.35), отриману для ШІМ, і порівняємо отримане значення коефіцієнта гармонік в моделі, зображеній на рис. 4.13 з випадком ШІМ. Часові діаграми роботи зміни опору навантаження R , кратності модуляції P , вихідної напруги u та коефіцієнта гармонік K_H показано на рис. 4.14, а-г відповідно.

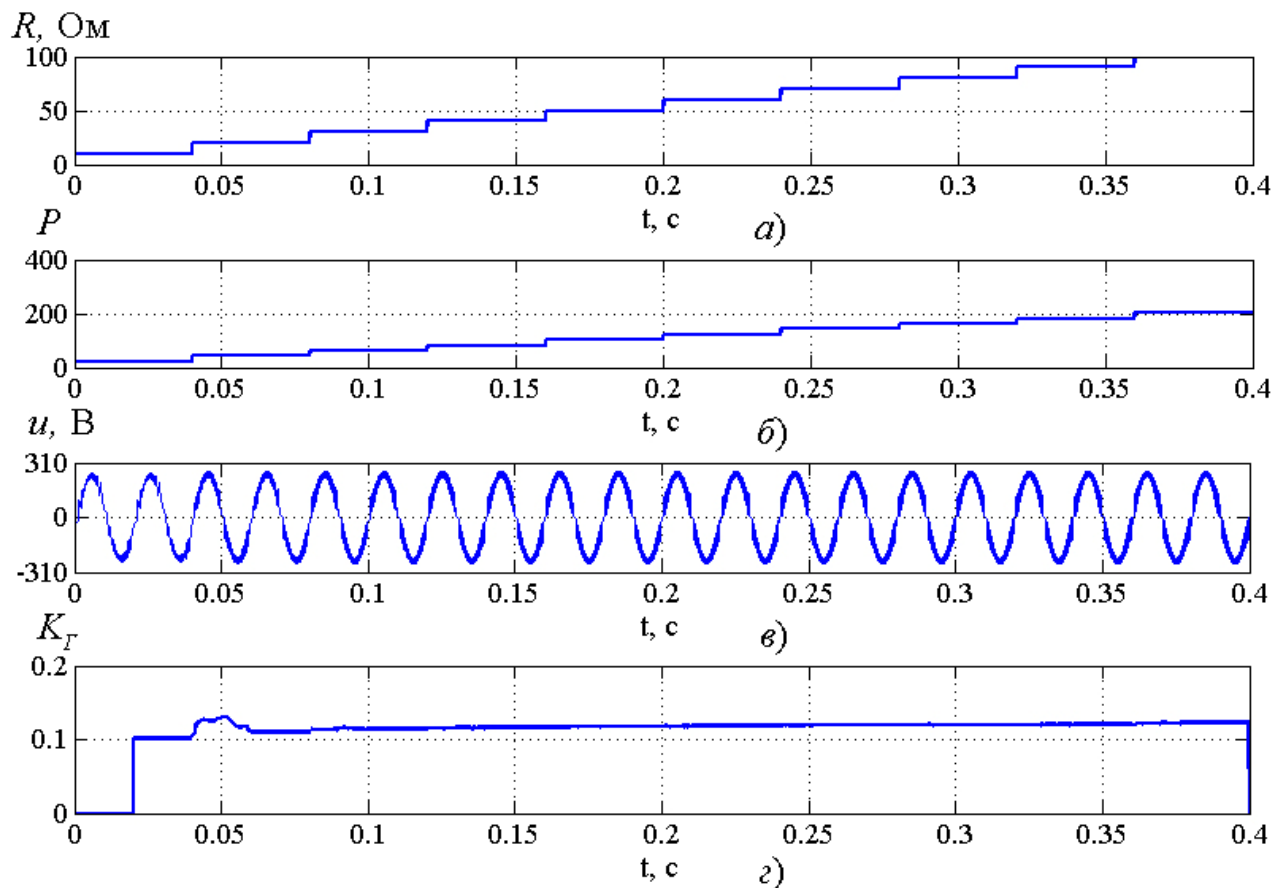


Рис. 4.14. Часові діаграми роботи системи керування кратністю модуляції для інвертора з ЧІМ: а) часова діаграма зміни опору навантаження R ; б) часова діаграма зміни кратності модуляції P ; в) часова діаграма напруги навантаження u ; г) часова діаграма коефіцієнта гармонік K_G

Відповідно до даних наведених на рис. 4.14 можна зробити висновок, що значення коефіцієнта гармонік збільшилось більше ніж вдвічі і знаходиться в межах $K_G = 0.1 \dots 0.12$. Для зменшення коефіцієнта гармонік доцільно збільшувати індуктивність дроселя фільтра. Якщо зменшення маси трансформатора для інвертора з ЧІМ є суттєвішим, ніж збільшення маси дроселя, то перетворювач доцільно використовувати на практиці. Внаслідок експериментів встановлено, що при грубому допущенні, що потужність трансформатора і індуктивність дроселя пропорційні їх масі m_{TP} і m_L відповідно, перетворювач доцільно використовувати, якщо сумарна маса трансформатора і дроселя при ЧІМ $m_{TP_ЧИМ} + m_{L_ЧИМ}$ менша за сумарну масу при ШІМ $m_{TP_ШИМ} + m_{L_ШИМ}$, $m_{TP_ЧИМ} + m_{L_ЧИМ} < m_{TP_ШИМ} + m_{L_ШИМ}$. Оцінка

ефективності використання ЧІМ для зменшення маси магнітних елементів здійснюється на основі показника Cl_m :

$$Cl_m = \frac{m_{TP_ШИМ} + m_{L_ШИМ}}{m_{TP_ЧИМ}(\mu) + m_{L_ЧИМ}(\mu)}. \quad (4.58)$$

На рис. 4.15 наведено сімейство залежностей показника Cl_m від глибини модуляції ЧІМ μ та співвідношення маси фільтра до маси трансформатора $g_L = m_{L_ЧИМ} / m_{TP_ЧИМ}$.

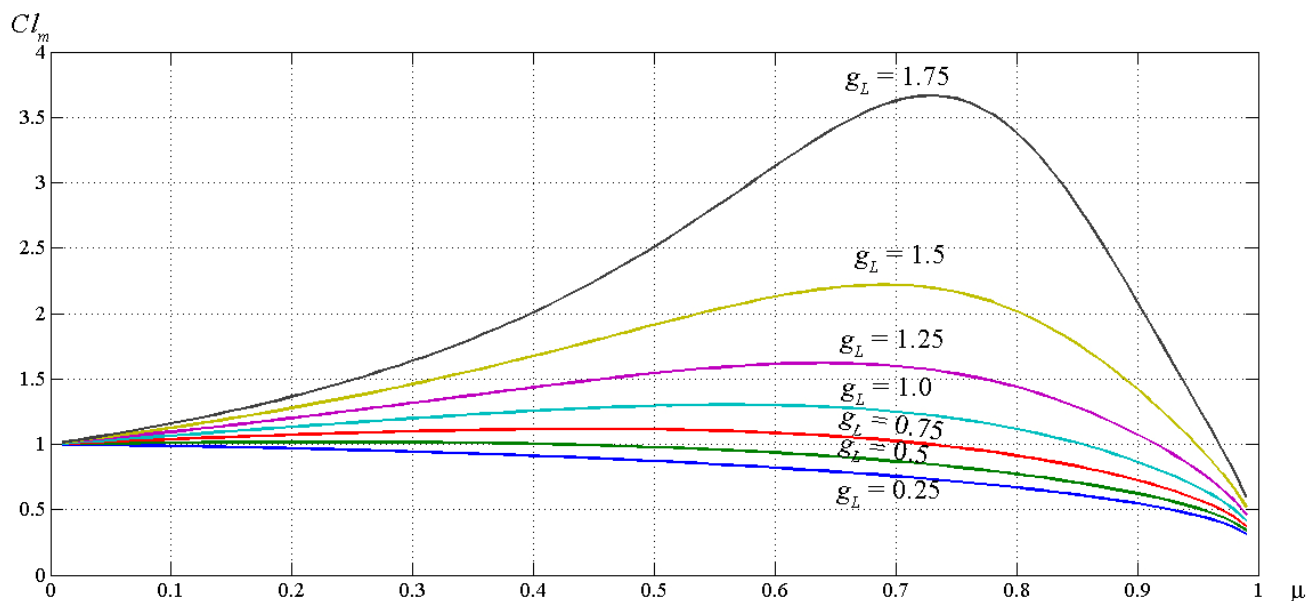


Рис. 4.15. Залежність показника Cl_m від глибини модуляції ЧІМ μ

З аналізу рис. 4.15 можна зробити висновок, що використання ЧІМ з інвертуванням кожного другого імпульсу доцільно при $g_L \leq 1$. За умови, що $g_L = 1$ сумарна маса дроселя та трансформатора стає меншою у порівнянні з ШІМ при глибині модуляції $\mu > 0.85$, коли значення параметра Cl_m стає меншим за одиницю, $Cl_m < 1$ та у граничному випадку зменшується на 60 %. Якщо ж $g_L = 0.25$, зменшення маси перетворювача спостерігається для будь-якого значення глибини модуляції μ та у граничному випадку зменшується на 70 %.

Висновки до розділу 4

1. Розроблено принцип керування за значенням параметрів якості електроенергії, представлених у згорнутому параметричному виді, що дозволяє на декілька порядків зменшити обсяг математичних операцій та дає можливість

реалізувати принцип регулювання значень параметрів якості електроенергії у системах керування напівпровідниковими перетворювачами у реальному масштабі часу.

2. Розроблений принцип керування однофазним інвертором за значенням коефіцієнта гармонік підтвердив зменшення обсягу математичних операцій мінімум на два порядки при похибці розрахунків не вище 1 %, зменшення на порядок обсягу динамічних втрат завдяки зменшенню значення параметра кратності модуляції при максимальних навантаженнях, що підтверджено моделюванням у середовищі MatLab Simulink®.

3. Запропоновано використовувати метод модуляції ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу, описаний в базисі ряду Фур'є двох змінних, та доведено зменшення масогабаритних параметрів перетворювача із забезпеченням необхідного значення коефіцієнта гармонік вихідної напруги при глибині модуляції, що перевищує значення 0.85 при рівності мас трансформатора та фільтра, та зменшення масогабаритних показників перетворювача у всьому діапазоні значень глибини модуляції максимум втричі, при співвідношенні мас трансформатора та фільтра у співвідношенні 4:1.

РОЗДІЛ 5. ВИЯВЛЕННЯ ІНТЕРГАРМОНІК ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є

5.1. Особливості розрахунку інтергармонічних складових

Як показано у розділі 2, утворення інтергармонік спричинено модуляцією параметрів напруги $u(2\pi f \cdot t)$, з частотою f , збурюючими факторами $y_{3\delta 1}(2\pi f_{3\delta 1} \cdot t)$, $y_{3\delta 2}(2\pi f_{3\delta 2} \cdot t) \dots y_{3\delta(M-2)}(2\pi f_{3\delta(M-2)} \cdot t)$ з частотами відповідно $f_{3\delta 1}, f_{3\delta 2} \dots f_{3\delta(M-1)}$, які не кратні частоті f . Якщо перейти до змінних $x_1 \dots x_M$, де змінна $x_1 = \omega_H t$ є аргументом носійної функції y_H , $y_H = f(x_1)$, змінна $x_2 = \omega_M t$ – модулюючої функції y_M , $y_M = f(x_2)$, змінні $x_3 = \omega_{3\delta 1} t, \dots, x_M = \omega_{3\delta(M-2)} t$ – аргументами збурюючих факторів, що утворюють інтергармонічні складові $y_{3\delta(1)} \dots y_{3\delta(M-2)}$, $y_{3\delta(1)} = f(x_3), \dots, y_{3\delta(M-2)} = f(x_M)$, то кратності модуляції носійної функції P та збурюючих факторів $P_3 \dots P_M$ розраховуються наступним чином: $P = x_1/x_2$, $P_3 = x_3/x_2, \dots, P_M = x_M/x_2$. При такому формулюванні інтергармоніки в системі виникають, якщо хоча б один параметр кратності модуляції $P, P_3 \dots P_M$ є дробовим числом.

Розглянемо загальну ситуацію, коли всі кратності модуляції є дробовими, $P = a/b$, $P_3 = a_3/b_3, \dots, P_M = a_M/b_M$, де $a, a_3 \dots a_M$ – чисельник дробових частин кратностей модуляцій $P, P_3 \dots P_M$ відповідно, $b, b_3 \dots b_M$ – знаменник дробових частин кратностей модуляцій $P, P_3 \dots P_M$ відповідно. У цьому випадку для розрахунку інтергармонік потрібно задати нові змінні аргументів $x_1^+, x_2^+, \dots, x_M^+$, що визначаються таким чином: $x_1^+ = V \cdot x_1$, $x_2^+ = V \cdot x_2, \dots, x_M^+ = V \cdot x_M$, де V – найменше спільне кратне чисел $b, b_3 \dots b_M$:

$$V = Lcm(b, b_3 \dots b_M). \quad (5.1)$$

Тому при визначенні інтергармонік необхідно використовувати спектральні компоненти $C_{(m1)(m2) \dots (mM)}^+$, розраховані відносно нових аргументів $x_1^+, x_2^+, \dots, x_M^+$.

Розглянемо відмінності розрахунку спектральних компонент $C_{(m1)(m2) \dots (mM)}$ і $C_{(m1)(m2) \dots (mM)}^+$ на простому прикладі розрахунку спектральних компонент функції y , що є добутком трьох незалежних функцій y_1, y_2, y_3 в просторі трьох змінних x_1, x_2, x_3 :

$$y(x_1, x_2, x_3) = y_1(x_1) \cdot y_2(x_2) \cdot y_3(x_3). \quad (5.2)$$

Аналітичний вираз трьох функцій задається наступною системою рівнянь:

$$y_i(x_i) = \begin{cases} A_i, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i \leq x_i < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i; \\ -A_i, \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i \leq x_i < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i; \\ 0, 0 \leq x_i < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i \leq x_i < \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i, \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i \leq x_i < 2\pi, \end{cases} \quad (5.3)$$

де i відповідає номеру функції y_i та аргументу x_i .

Спочатку розглянемо випадок, коли кратності модуляції $P = x_1/x_2$ і $P_3 = x_3/x_2$ є цілими числами. У цьому випадку спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}$ розраховуються за формулами:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)(m_3)} &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y_1(x_1) y_2(x_2) y_3(x_3) e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \frac{A_1 A_2 A_3}{4\pi^3} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i} e^{jm_i x_i} dx_i - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i} e^{jm_i x_i} dx_i \right) = \\ &= \frac{A_1 A_2 A_3}{4\pi^3} \sum_{i=1}^3 (1 - (-1)^{m_i}) \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i} e^{jm_i x_i} dx_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Аналізуючи вираз спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}$ в (5.4), можна зробити висновок, що спектральні компоненти мають ненульові значення тільки для непарних m_1, m_2, m_3 :

$$\begin{aligned} C_{(2m_1-1)(2m_2-1)(2m_3-1)} &= \frac{2 A_1 A_2 A_3}{\pi^3} \sum_{i=1}^3 \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_i}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_i} e^{j(2m_i-1)x_i} dx_i = \\ &= \frac{16(j)^{2(m_1+m_2+m_3)-3} A_1 A_2 A_3}{\pi^3 (2m_1-1)(2m_2-1)(2m_3-1)} \times \\ &\times \sin\left(\frac{(2m_1-1)\pi\gamma_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m_2-1)\pi\gamma_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m_3-1)\pi\gamma_3}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Після розрахунку спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}$ розраховується спектр модульованого сигналу:

$$C_k = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} C_{(2m_1-1)(k-(2m_1-1)P-(2m_3-1)P_3)(2m_3-1)}, \quad (5.6)$$

де k – номер гармоніки.

При розрахунку спектра слід мати на увазі, що при парних або непарних значеннях обох кратностей модуляції P і P_3 , спектр сигналу містить лише непарні гармоніки, а якщо один з параметрів має парне значення, а інший непарне значення – спектр містить лише парні гармоніки.

Сигнал, відновлений за розрахованим спектром, з параметрами $P = 6$, $P_3 = 16$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.5$ показано на рис. 5.1, а, на рис. 5.1, б – еталонний сигнал.

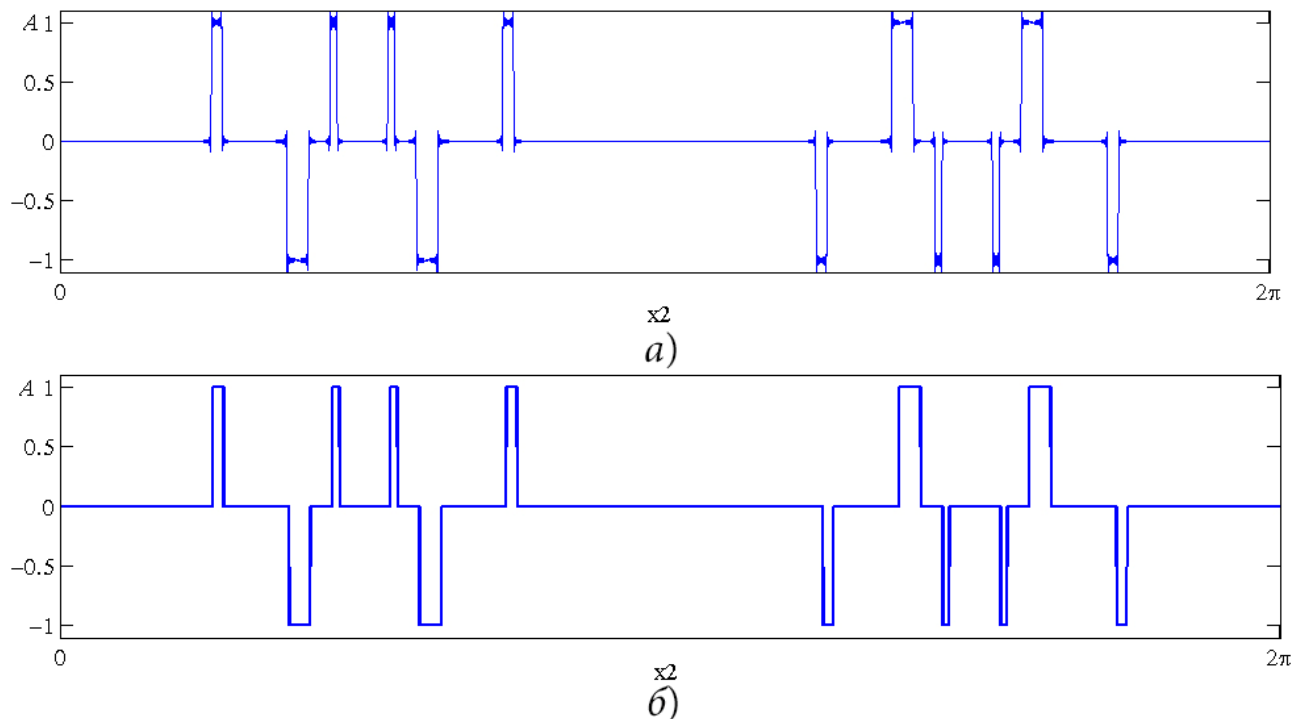


Рис. 5.1. Розрахований а) та еталонний б) сигнали

У результаті порівняння розрахованого і еталонного сигналів можна зробити висновок, що за виключенням високочастотних спотворень, відомих як ефект Гіббса [189, 190], в розрахованому сигналі, їх форма подібна.

Розглянемо випадок дробових значень кратності модуляції, що є причиною виникнення інтергармонік. Нехай відоме число V , розраховане за формулою (5.1), що показує скільки періодів модулюючої функції y_M міститься на новому періоді

визначення спектра. У новому просторі змінних $x_1^+, x_2^+, \dots, x_M^+$ формула для розрахунку спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2) \dots (m_M)}^+$ зміниться лише для змінної x_2^+ , оскільки на періоді $[0; 2\pi]$ вкладається V періодів модулюючої функції. Розрахунок спектральних компонент для розглянутого прикладу для дробових кратностей модуляції є таким:

$$C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+ = \frac{A_1 A_2 A_3}{4\pi^3} \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_1}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_1} e^{jm_1 x_1^+} dx_1^+ - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_1}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_1} e^{jm_1 x_1^+} dx_1^+ \right) \times$$

$$\times \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_3}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_3} e^{jm_3 x_3^+} dx_3^+ - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_3}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_3} e^{jm_3 x_3^+} dx_3^+ \right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^V \left(\int_{\frac{i}{V} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_2 \right)}^{\frac{i}{V} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_2 \right)} e^{jm_2 x_2^+} dx_2^+ - \int_{\frac{i}{V} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_2 \right)}^{\frac{i}{V} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma_2 \right)} e^{jm_2 x_2^+} dx_2^+ \right). \quad (5.7)$$

Вираз для розрахунку спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+$ (5.7) і стандартна формула для цілих значень кратності модуляції (5.4) відрізняється лише межами інтегрування за змінною x_2 . Після інтегрування виразів в формулі (5.7), отримаємо:

$$C_{(2m_1-1)((2m_2-1)V)(2m_3-1)} = \frac{16V(j)^{2(m_1+Vm_2+m_3-1)-V} A_1 A_2 A_3}{\pi^3 (2m_1-1)(2m_2-1)(2m_3-1)} \times$$

$$\sin\left(\frac{(2m_1-1)\pi\gamma_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m_2-1)\pi\gamma_2}{2V}\right) \sin\left(\frac{(2m_3-1)\pi\gamma_3}{2}\right). \quad (5.8)$$

Формулу для розрахунку спектра на основі спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+$ наведено нижче:

$$C_k = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} C_{(2m_1-1)(k-(2m_1-1)P \cdot V - (2m_3-1)P_3 \cdot V)(2m_3-1)}^+. \quad (5.9)$$

Відновлений сигнал, за спектром описаним на основі формул (5.8), (5.9) та його еталон для випадку $P = 10/3$, $P_3 = 8$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.9$ показано на рис. 5.2, а і б відповідно.

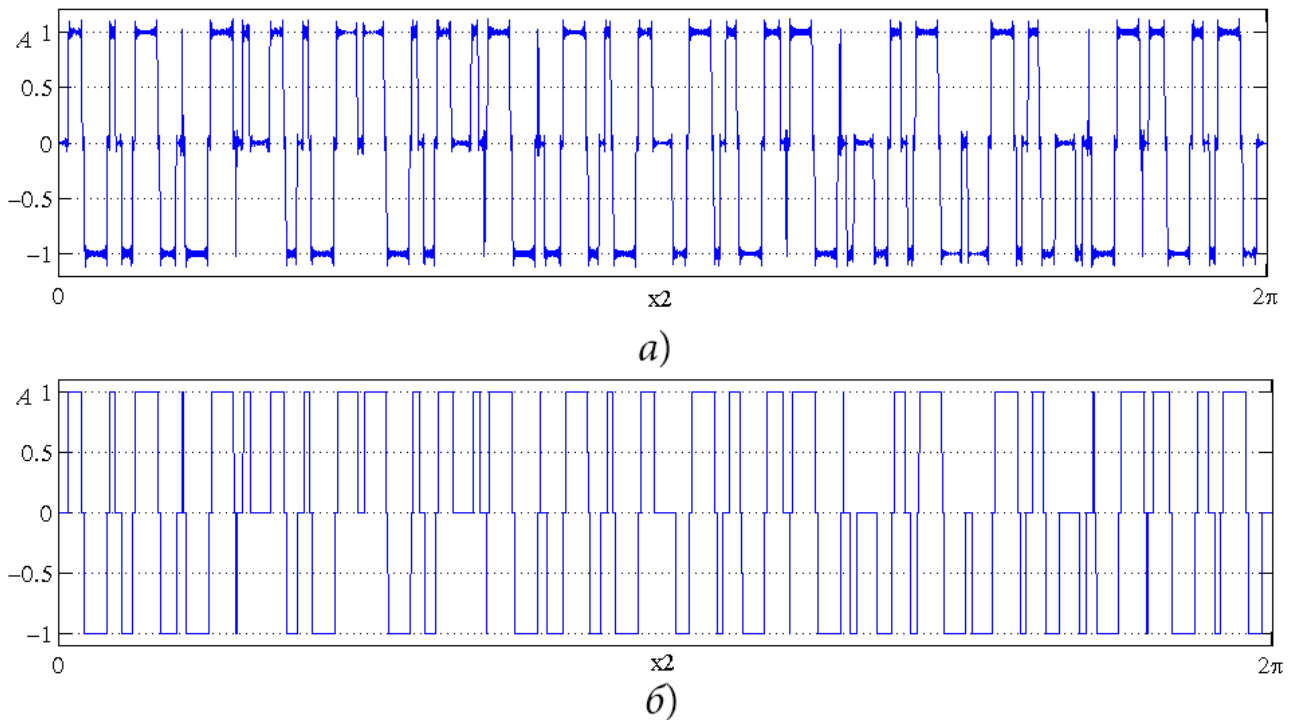


Рис. 5.2. Розрахований а) та еталонний б) сигнали з інтергармоніками

Розрахунок спектра з інтергармоніками за формулами (5.8) і (5.9), показаний на рис. 5.2, а, відрізняється від режиму без інтергармонік згідно з формулами (5.5) і (5.6) тим, що у режимі з без інтергармонік спектр розраховується на одному період модулюючої функції, тобто змінна x_2 змінюється в діапазоні $x_2 \in [0; 2\pi]$, тобто $V = 1$, тоді як в режимі з інтергармоніками $x_2 \in [0; 2\pi \cdot V]$, $V > 1$.

Розрахунок інтергармонік має певні особливості залежно від типу збурень, що їх утворюють, і способів модуляції змінної напруги. Тому особливості розрахунку інтергармонік більш детально проаналізовано для типових випадків: 1) утворення інтергармонік напруги мережі змінного струму внаслідок під'єднання імпульсних параметричних навантажень; 2) утворення низькочастотних інтергармонік у високочастотному трансформаторі через наявність пульсації випрямленої напруги; 3) особливості утворення інтергармонік у фазному струмі асинхронного двигуна.

5.2. Мережа змінного струму з імпульсним параметричним навантаженням

Збільшення кількості імпульсних нелінійних споживачів промислової мережі змінного струму спричинило погіршення параметрів якості електроенергії. Тому актуальною є задача з розробки методів аналізу впливу збурюючих факторів, що разом з напругою мережі, можуть утворювати інтергармоніки. Використання існуючих чисельних методів [61, 69, 70] для вирішення цієї задачі є доволі трудомістким, тому для зменшення кількості математичних операцій можуть використовуватись ймовірнісні методи [191, 192], що дозволяє розрахувати значення інтергармонік у декількох режимах та інтерполювати отримані значення на весь діапазон значень параметрів, що разом зі зменшенням трудомісткості призводить до збільшення похибки розрахунків.

Суттєво зменшити обсяг розрахунків без втрати точності дозволяють аналітичні методи. Використання ряду Фур'є декількох змінних дає такі переваги:

- опис моделі сигналу одразу в частотній області;
- розрахунок інтергармонічного складу напруги з мінімальною кількістю розрахунків;
- мінімізація похибки.

5.2.1. Модель мережі змінного струму

Як правило, джерелом вищих гармонік та інтергармонік струму є споживачі Споживач(1).. Споживач(d), що, внаслідок наявності ненульового внутрішнього опору мережі Z , спричиняють появу вищих гармонік та інтергармонік напруги у точці A їх приєднання. Схему заміщення мережі з іспоживачами показано рис. 5.3.

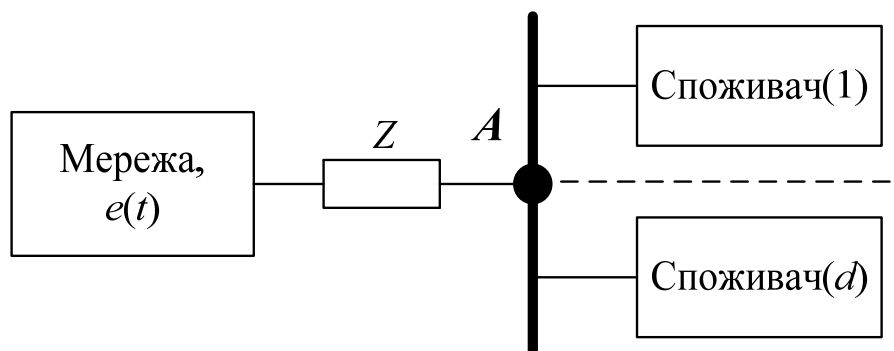


Рис. 5.3. Схема заміщення мережі зі споживачами

Діюче значення напруги мережі в точці під'єднання A , E_A визначається як різниця напруги мережі на виході генератора E та напруги на внутрішньому опорі Z , U_Z :

$$\dot{E}_A = \dot{E} - \dot{U}_Z = \dot{E} - \dot{Z} \left(\sum_d \dot{I}_{cust(d)} \right), \quad (5.10)$$

де $I_{cust(d)}$ – діюче значення струму споживача d .

Для розрахунку спотворення напруги в точці під'єднання споживачів у часовій області $e_A(t)$ доцільно використовувати інтеграл Дюамеля [143]:

$$\begin{aligned} e_A(t) &= e(t) - u_z(t) = \\ &= e(t) - \left(h(t) \sum_d i_{cust(d)}(0) + \int_0^t h(t-\tau) \sum_d i'_{cust(d)}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де $e(t)$ – напруга мережі на виході генератора, $u_z(t)$ – падіння напруги на опорі Z , $i_{cust(d)}(t)$ – миттєве значення струму споживача d , $h(t)$ – реакція напруги на опорі Z на одиничний стрибок струму.

Найчастіше вихідний опір напруги мережі Z має активно-індуктивний характер. Реакція напруги на одиничний стрибок струму є такою:

$$h(t) = R + L \cdot \delta(t), \quad (5.12)$$

де L , R – значення індуктивності та активного опору внутрішнього опору, δ – дельта-функція.

Розглянемо типові профілі струмів з інтергармоніками, що формуються імпульсними параметричними навантаженнями.

5.2.1. Профілі струмів з інтергармоніками імпульсних параметричних навантажень

Споживачі з інтергармоніками можна розділити на такі групи [193]:

1. Система змінного струму, що працює на частоті f_{int} , що відрізняється від частоти мережі f_1 . Як правило така система змінного струму під'єднується до заданої через ланку постійного струму. Такими системами можуть бути дві системи електроживлення з'єднаними через вставку постійного струму [193], двигуни змінного струму, під'єднані через електропривод до мережі змінного струму. Внаслідок цього з мережі споживається струм i_{int} , що може бути записаний рядом Фур'є:

$$i_{int} = \sum_{k=1}^l I_{int(k)} \sin(2\pi k f_{int(1)} t + \varphi_k), \quad (5.13)$$

де $I_{int(k)}$ – амплітуда гармоніки струму k , φ_k – фаза гармоніки k .

Відповідно до формули (5.12), напруга на внутрішньому опорі $u_z(t)$ для заданого у формулі (5.13) струму дорівнює:

$$u_{z1}(t) = R \sum_{k=1}^l I_{int(k)} \sin(2\pi k f_{int(1)} t + \varphi_k) - 2\pi L k f_{int(1)} \sum_{k=1}^l I_{int(k)} \cos(2\pi k f_{int(1)} t + \varphi_k), \quad (5.14)$$

2. Параметричні навантаження: зварювальні апарати, лазерні принтери, опір яких R_{int} змінюється за законом:

$$R_{int} = R_0 \cdot f(t, f_{int}), \quad (5.15)$$

де f – функція модуляції опору з частотою f_{int} .

У роботі аналізуються дві функціональні залежності параметричного навантаження, що призводять:

- до імпульсної форми струму:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{e(t)t}{R_{on}t_r}, 0 < t \leq t_r; \\ \frac{e(t)}{R_{on}}, t_r < t \leq t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ \frac{e(t)}{R_{on}} - \frac{\frac{e(t)}{R_{on}} \left(t - t_r - \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} \right)}{t_f}, t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ 0, t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(2)}}, \end{cases} \quad (5.16)$$

де t_r і t_f – передній і задній фронти струму, відповідно, R_{on} – імпульсне навантаження, γ_1 – відносна тривалість періода, під час якого імпульсне навантаження під'єднано до мережі.

- до плавної зміни струму за законом:

$$i(t) = \begin{cases} e(t) \cdot G_0 t \frac{f_{int(3)}}{\gamma}, 0 < t \leq \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}}; \\ \frac{f_{int(3)} e(t) G_0 \left(\frac{1}{f_{int(3)}} - t \right)}{(1 - \gamma_2)}, \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(3)}}, \end{cases} \quad (5.17)$$

де вираз $G_0 \cdot t$ описує провідність навантаження, що плавно змінюється з часом, γ_2 – відносна тривалість періода, що відповідає наростанню струму.

Зміна напруги на внутрішньому опорі джерела через протікання струму, описаного законом, наведеним у формулах (5.16) і (5.17), має відповідну залежність:

$$u_{z2}(t) = \begin{cases} R \frac{e(t)t}{R_{on}t_r} - L \frac{I_{on}}{t_r}, 0 < t \leq t_r; \\ R \frac{e(t)}{R_{on}}, t_r < t \leq t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ R \frac{e(t)}{R_{on}} \left(1 - \frac{\left(t - t_r - \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} \right)}{t_f} \right) + L \frac{I_{on}}{t_f}, t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ 0, t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(2)}}; \end{cases} \quad (5.18)$$

$$u_{z3}(t) = \begin{cases} G_0 t e(t) \frac{f_{int(3)}}{\gamma_2} R - \frac{G_0 f_{int(3)} L}{\gamma_2}, 0 < t \leq \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}}; \\ \frac{f_{int(3)} G_0 e(t) R \left(\frac{1}{f_{int(3)}} - t \right)}{(1 - \gamma_2)} + \frac{L G_0 f_{int(3)}}{(1 - \gamma_2)}, \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(3)}}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Внаслідок взаємодії процесів з частотами $f_{int(k)}$ і f_1 утворюються інтергармоніки. Розглянемо переваги використання узагальненого ряду Фур'є декількох змінних для їх аналізу.

5.2.2. Спектральні компоненти збурень напруги мережі

При використанні узагальненого ряду Фур'є декількох змінних для опису впливу збурень на форму напруги мережі, здійснюється множення форми напруги

мережі на описані в моделі спотворення напруги (5.14), (5.18), (5.19), тому перед їх записом їх потрібно пронормувати відносно амплітудного значення напруги мережі $e(t)$:

$$u_z^*(t) = 1 - \frac{u_z(t)}{e(t)}. \quad (5.20)$$

Пронормувавши відповідно до формули (5.20) вирази (5.14), (5.18), (5.19), отримаємо:

$$u_{z1}^*(t) = 1 - \frac{R}{E_m} \sum_{k=1}^l I_{int(k)} \sin(2\pi k f_{int(1)} t + \varphi_k) + \frac{2\pi L k f_{int(1)}}{E_m} \sum_{k=1}^l I_{int(k)} \cos(2\pi k f_{int(1)} t + \varphi_k); \quad (5.21)$$

$$u_{z2}^*(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{E_m} \left(R \frac{t}{R_{on} t_r} - L \frac{1}{R_{on} t_r} \right), 0 < t \leq t_r; \\ 1 - \frac{R}{R_{on} E_m}, t_r < t \leq t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ 1 - \frac{1}{E_m} \left(\frac{R}{R_{on}} \left(1 - \frac{\left(t - t_r - \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} \right)}{t_f} \right) + \frac{L}{R_{on} t_f} \right), t_r + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}}; \\ 1, t_r + t_f + \frac{\gamma_1}{f_{int(2)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(2)}}; \end{cases} \quad (5.22)$$

$$u_{z3}^*(t) = \begin{cases} 1 - \frac{G_0}{E_m} \left(t R \frac{f_{int(3)}}{\gamma_2} - L \right), 0 < t \leq \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}}; \\ 1 - \frac{f_{int(3)} G_0}{E_m} \left(\frac{R \left(\frac{1}{f_{int(3)}} - t \right)}{(1 - \gamma_2)} + \frac{L}{(1 - \gamma_2)} \right), \frac{\gamma_2}{f_{int(3)}} < t \leq \frac{1}{f_{int(3)}}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Запишемо загальний вираз напруги з інтергармонічними збуреннями (5.21)-(5.23) на основі узагальненого ряду Фур'є у просторі 4 змінних: x_1 – змінна, що є аргументом напруги мережі $e(x_1) = E_m \sin(x_1)$, x_2 - x_4 – змінні збурень $u_{z1}^*(x_2)$, $u_{z2}^*(x_3)$, $u_{z3}^*(x_4)$ [194]:

$$C_{(m_1)(m_2)(m_3)(m_4)} = \frac{1}{2^3 \pi^4} \int_0^{2\pi} E_m \sin(Vx_1) e^{jm_1 x_1} dx_1 \int_0^{2\pi} u_{z1}^*(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} u_{z2}^*(x_3) e^{jm_3 x_3} dx_3 \int_0^{2\pi} u_{z3}^*(x_4) e^{jm_4 x_4} dx_4, \quad (5.24)$$

де V – найменше спільне кратне співвідношень $P_2 = x_2/x_1, \dots, P_M = x_M/x_1$:

$$V = Lcm(P_2; \dots; P_M). \quad (5.25)$$

Проінтегрувавши окремі інтеграли в формулі (5.24), отримаємо:

$$\text{int}_1 = \int_0^{2\pi} E_m \sin(Vx_1) e^{jm_1 x_1} dx_1 = \begin{cases} j\pi E_m, m_1 = V; \\ -j\pi E_m, m_1 = -V; \\ 0, m_1 \neq -V, m_1 \neq V; \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\text{int}_2 = \int_0^{2\pi} u_{z1}^*(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 = \begin{cases} -\frac{\pi I_{\text{int}(k)} e^{-j\varphi_k}}{E_m} (jR + 2\pi L k f_{\text{int}(1)}), m_2 = k; \\ -\frac{\pi I_{\text{int}(2k-1)} e^{-j\varphi_k}}{E_m} (-jR + 2\pi L k f_{\text{int}(1)}), m_2 = -k; \\ 2\pi, m_2 = 0; \\ 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq k, m_2 \neq -k; \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\text{int}_3 = \int_0^{2\pi} u_{z2}^*(x_3) e^{jm_3 x_3} dx_3 =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{E_m R_{on}} \left(R \frac{e^{j\varphi_r m_3} (1 - j\varphi_r m_3) - 1}{\varphi_r m_3^2} - \frac{jL}{\varphi_r m_3} (1 - e^{jm_3 \varphi_r}) + R \frac{j(e^{jm_3 \varphi_r} - e^{jm_3(\varphi_r + 2\pi\gamma_1)})}{m_3} + \right. \\ & + R \left(j \left(\frac{1}{m_3} + \frac{\varphi_r + 2\pi\gamma_1}{\varphi_f m_3} \right) e^{jm_3(\varphi_r + 2\pi\gamma_1)} (1 - e^{jm_3 \varphi_f}) - \right. \\ & \left. \left. - \left(e^{j(\varphi_r + \varphi_f + 2\pi\gamma_1)m_3} \frac{(1 - j(\varphi_r + \varphi_f + 2\pi\gamma_1)m_3)}{\varphi_f m_3^2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - e^{j(\varphi_r + 2\pi\gamma_1)m_3} \frac{(1 - j(\varphi_r + 2\pi\gamma_1)m_3)}{\varphi_f m_3^2} \right) \right) + \frac{jL e^{jm_3(\varphi_r + 2\pi\gamma_1)}}{\varphi_f m_3} (1 - e^{jm_3 \varphi_f}) \right), m_3 \neq 0; \\ & 2\pi - \frac{R}{E_m R_{on}} \left(\frac{\varphi_r}{2} + 2\pi\gamma_1 + \frac{\varphi_f}{2} \right), m_3 = 0; \end{aligned} \right. \quad (5.28)$$

$$\text{int}_4 = \int_0^{2\pi} u_{z3}^*(x_4) e^{jm_4 x_4} dx_4 = \begin{cases} -\frac{G_0}{E_m} \left(R \frac{e^{jm_4 2\pi\gamma_2} (1 - jm_4 2\pi\gamma_2) - 1}{2\pi\gamma_2 m_4^2} - \frac{jL}{2\pi\gamma_2 m_4} \times \right. \\ \times (1 - e^{jm_4 2\pi\gamma_2}) + \frac{j}{m_4} \left(\frac{R + L / 2\pi}{(1 - \gamma)} \right) (e^{jm_4 2\pi\gamma_2} - 1) - \\ \left. - \frac{R((1 - j2\pi m_4) - e^{jm_4 2\pi\gamma_2} (1 - jm_4 2\pi\gamma_2))}{2\pi(1 - \gamma_2) m_4^2}, m_4 \neq 0; \right. \\ \left. 2\pi - \frac{2G_0 R}{E_m}, m_4 = 0. \right. \end{cases} \quad (5.29)$$

На основі отриманих значень інтегралів (5.26)-(5.29) та значень параметрів V , P_2 - P_4 розраховується спектр досліджуваного сигналу.

Значення гармоніки C_k з номером k є сумою двох комбінаційних складових:

$$k^+ = \sum_{l=2}^M m_l P_l + V; \quad (5.30)$$

$$k^- = \sum_{l=2}^M m_l P_l - V, \quad (5.31)$$

кожна яких розраховується за формулою:

$$C_{\sum_{l=2}^M m_l P_l \pm V} = \frac{1}{2^{M-1} \pi^M} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \text{int}_1 \dots \sum_{m_M=-\infty}^{\infty} \text{int}_M. \quad (5.32)$$

На основі формули (5.32) отримано вплив кожного збурення на напругу мережі в точці під'єднання споживачів $e_A(t)$. Вплив збурень отримано для таких значень параметрів мережі $e(t) = 311 \cdot \sin(2\pi \cdot 50t)$, $L = 100$ мкГн, $R = 1$ Ом.

Збурення мережі мають такі параметри:

- збурення, викликане споживанням струму іншої частоти: $f_{int(1)} = 100/3$ Гц, $V = 3$, $\varphi = 0$ з амплітудою $I_{int} = 30$ А, рис. 5.4, а;

- збурення, викликане імпульсним навантаженням $R_{on} = 0.01$ Ом, що підключається до мережі з частотою $f_{int(2)} = 350/3$ Гц, $V = 3$, та параметрами $\varphi_r = \varphi_f = 0.1\pi$, $\gamma_1 = 0.1$, рис. 5.4, б;

- збурення, викликане навантаженням з плавною зміною провідності з параметрами $G_0 = 100$ См/с, що змінюється періодично з частотою $f_{int(3)} = 650/3$ Гц, $V = 3$ та $\gamma_2 = 0.7$, рис. 5.4, в.

Сумарний вплив всіх наведених збурень на напругу мережі в точці під'єднання споживачів та її спектр, розрахований за формулою (5.32), показано на рис. 5.4, г і 5.5 відповідно.

Як показано на рис 5.4, г сумарна напруга e_A є добутком напруги мережі e і збурень, зображених на рис. 5.4, а-в. На рис. 5.5 амплітуда гармоніки, що відповідає частоті мережі має номер $k = V$. Гармоніки з номером k не кратні V , $k \neq V$, є інтергармоніками. При зміні параметрів збурень розрахунок спектра напруги мережі є значно ефективнішим, ніж за умови використання ряду Фур'є однієї змінної. Розрахуємо кількісні показники підвищення ефективності розрахунку.

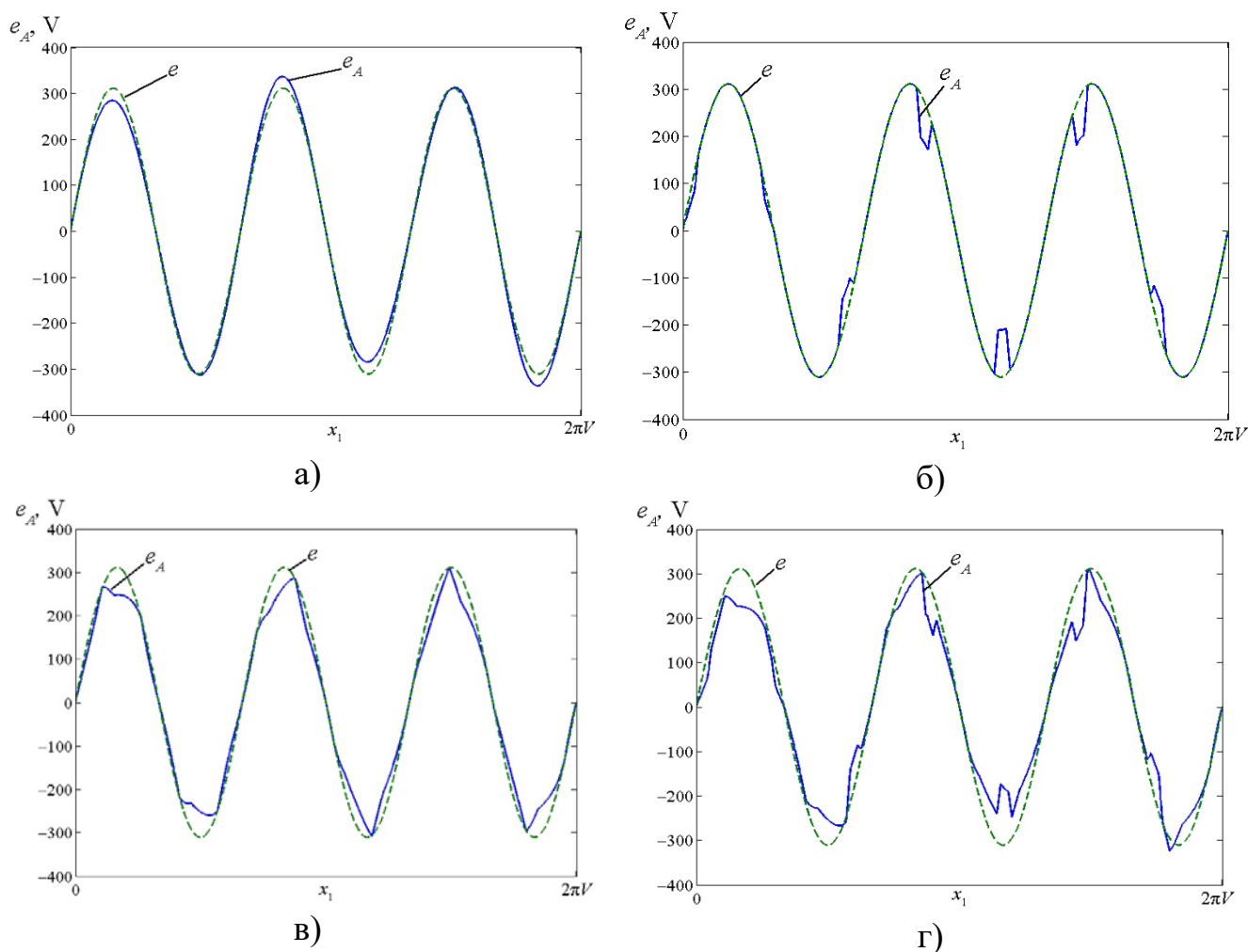


Рис. 5.4. Вплив збурень на форму напруги мережі: а) збурення, викликане споживанням струму іншої частоти; б) збурення, викликане імпульсним навантаженням R_{on} ; в) збурення, викликане навантаженням з плавною зміною провідності; г) напруга мережі зі всіма збуреннями

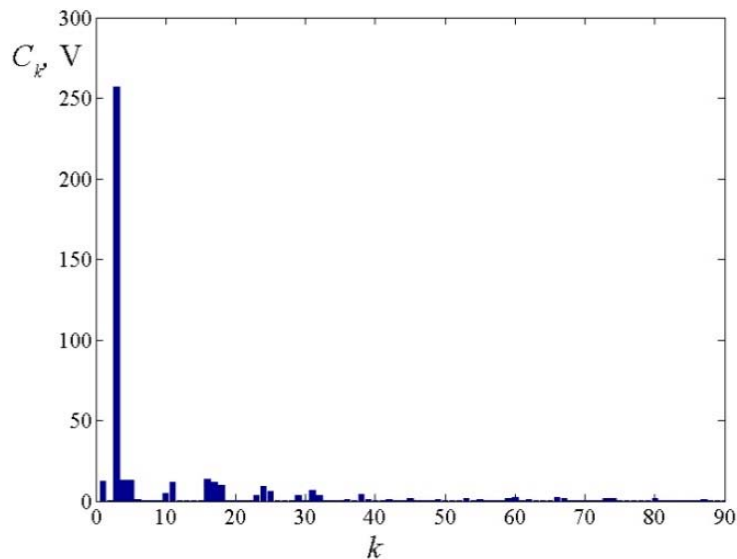


Рис. 5.5. Спектр напруги мережі

5.2.3. Аналіз зменшення трудомісткості розрахунків у порівнянні з рядом Фур'є однієї змінної

Використання узагальненого ряду Фур'є декількох змінних при розрахунку спектру напруги з врахуванням збурень має ряд якісних переваг у порівнянні з рядом Фур'є однієї змінної:

- отримання спектру безпосередньо, без необхідності формування сигналів збурень у часовій області;
- проста процедура перерахунку спектру при зміні частоти одного із збурюючих факторів;
- виокремлення впливу параметрів кожного збурюючого фактора на спектр напруги з можливістю його подальшого аналізу в аналітичній формі.

Однією з найсуттєвіших переваг є значне зменшення кількості математичних операцій при розрахунку окремих гармонік спектра, що дає можливість використовувати їх у контурі систем керування в реальному масштабі часу.

Проаналізуємо зменшення кількості операцій при розрахунку напруги мережі для розглянутих збурень. Для розрахунку N гармонік на основі ряду Фур'є M змінних, необхідно розрахувати:

$$N_M = \lceil M^{\sqrt{N}} \rceil, \quad (5.33)$$

значень інтегралів int_i . Після цього відповідно до формули (5.32) значення окремих гармонік розраховується простим множенням розрахованих компонент int_i . Тому загалом складність розрахунку спектра на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних прямує до теоретичної межі мінімально можливої складності алгоритму розрахунку спектра $O(N)$, що значно менше ніж у ШПФ $O(M \log(N))$. Розрахунок значення окремої гармоніки або групи гармонік відповідно до формули (5.33) має складність $O(N^{1/M})$, що також значно менше ніж у ДПФ - $O(N)$. За умови перерахунку спектра при зміні частини параметрів, розрахунок спектра додатково пришвидшується за рахунок того, що частина складових int_i не потребує перерахунку. Тому використання узагальненого ряду Фур'є на практиці значно прискорить розрахунок спектра, так і окремих його гармонік у системах керування, що працюють у реальному масштабі часу.

5.3. Низькочастотні інтергармоніки в однофазному інверторі з гальванічною розв'язкою

Найбільший вплив на підмагнічування трансформатора мають низькочастотні інтергармоніки, частота яких f_{int} є нижчою частоти першої гармоніки f_1 , що передається через трансформатор, $f_1 > f_{int}$ [195-197]. В AC-DC перетворювачах з гальванічною розв'язкою однією з причин виникнення інтергармонік є взаємодія пульсації випрямленої напруги, що має подвійну частоту мережі $2f_g$, та проміжної частоти роботи перетворювача f_i .

Проаналізуємо принцип появи інтергармонік в однофазному AC-DC перетворювачі з гальванічною розв'язкою залежно від пульсації напруги в ланці постійного струму перетворювача.

5.3.1. Модель процесів в АС-DC перетворювачі

Структура типового АС-DC перетворювача з гальванічною розв'язкою показана на рис. 5.6.

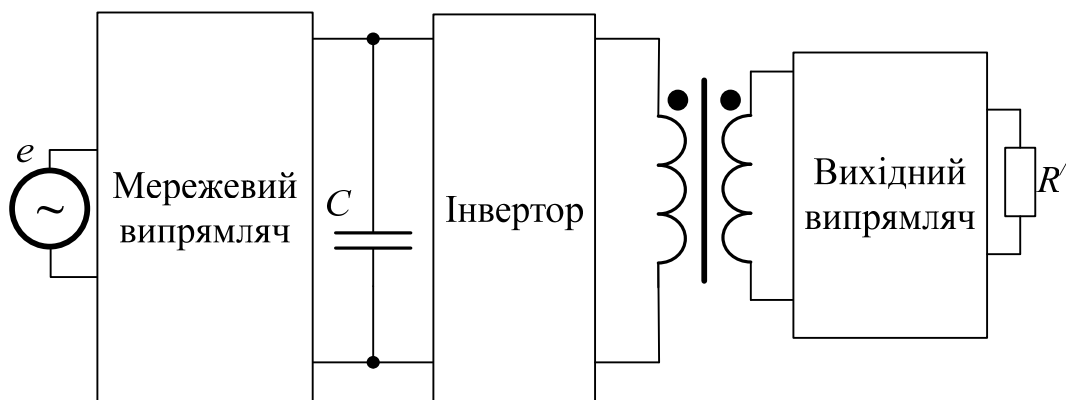


Рис. 5.6. Структура типового АС-DC перетворювача.

Внаслідок пульсації напруги в ланці постійного струму на конденсаторі C , напруга на вході трансформатора, сформована інвертором, може містити низькочастотні гармоніки, що підмагнічують трансформатор.

Для аналізу інтергармонік розглянемо моделі процесів, що впливають на їх утворення, - випрямленої напруги мережевим випрямлячем і напруги, сформованої інвертором.

Напруга на конденсаторі C ланки постійного струму по кутовій координаті $x_2 = \omega_2 t$, де ω_2 – кутова частота напруги мережі, t – час, характеризується кутом 2θ , протягом якого діоди мережевого випрямляча проводять струм, та кутом відсічки δ при якому діоди вхідного випрямляча закриваються [198, 199], як показано на рис. 5.7.

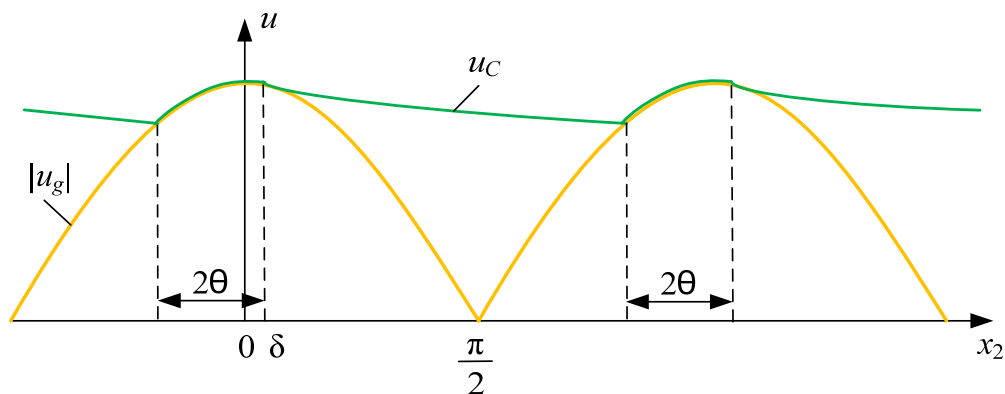


Рис. 5.7. Часова діаграма напруги на конденсаторі ланки постійного струму

На інтервалах $[-(2\theta-\delta) + \pi \cdot k; \delta + \pi \cdot k)$, де k – ціле число, напруга на конденсаторі C повторює модуль напруги мережі $u_C = |u_g|$, тоді як на інтервалі $[\delta + \pi \cdot k; -(2\theta-\delta) + \pi \cdot (k+1))$, напруга на конденсаторі C змінюється за законом:

$$u_C(x_2) = u_C(\delta) e^{-x_2/\omega_2 \cdot \tau}, \quad (5.34)$$

де $\tau = R \cdot C$ – стала часу електричного ланцюга, що складається з перерахованого до первинної обмотки трансформатора навантаження R і ємності C .

Кути δ і 2θ розраховуються за формулами [14]:

$$\delta = \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \approx \frac{1}{\omega CR}; \quad (5.35)$$

$$2\theta = \sqrt{2\pi\delta}. \quad (5.36)$$

Інвертор працює на проміжній частоті ω_1 . У випадку нерегульованого AC-DC перетворювача коефіцієнт заповнення імпульсів γ є постійним, $\gamma = \text{const}$. У системі із замкненим зворотним зв'язком, параметр γ є функцією вхідної напруги і опору навантаження, $\gamma = f(u_C, R)$.

Розглянемо закон зміни параметра γ при постійному навантаженні, $R = \text{const}$. Нехай номінальному середньому значенню напруги на вході інвертора U_{in_nom} відповідає номінальне значення коефіцієнта заповнення γ_{nom} . Тоді середнє значення випрямленої вихідної напруги інвертора U_{out_nom} визначається за регулювальною характеристикою:

$$U_{out_nom} = n \cdot \gamma_{nom} \cdot U_{in_nom}, \quad (5.37)$$

де n – коефіцієнт трансформації трансформатора.

У випадку відхилення значення вхідної напруги на ΔU_{in} , $U_{in} = U_{in_nom} + \Delta U_{in}$, на основі ідеальної регулювальної характеристики інвертора (5.37), параметр γ розраховується за формулою [200]:

$$\gamma = \gamma_{nom} \frac{U_{in_nom}}{U_{in_nom} + \Delta U_{in}} \approx \gamma_{nom} \frac{U_{in_nom} - \Delta U_{in}}{U_{in_nom}}. \quad (5.38)$$

Середнє значення напруги U_{in_nom} визначається з рис. 5.7 за умови $\delta \ll 1$:

$$U_{in_nom} = U_{gm} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad (5.39)$$

де U_{gm} – максимальне значення напруги мережі.

З урахуванням того, що відхилення напруги ΔU_{in} є різницею напруги на конденсаторі C , u_C і середнього значення напруги U_{in_nom} , $\Delta U_{in} = u_C - U_{in_nom}$, формула (5.43) перетвориться до виду:

$$\gamma = \gamma_{nom} \left(2 - \frac{u_C}{U_{in_nom}} \right). \quad (5.40)$$

Зважаючи на пульсацію напруги на конденсаторі C , амплітудне значення змінної напруги на вході трансформатора також весь час змінюватиметься.

5.3.2. Розрахунок спектра напруги інвертора

Напруга на вході трансформатора інвертора формується на основі випрямленої напруги, що описана у просторі аргументу x_2 , і вихідної напруги інвертора, що залежить від змінної x_1 . Отже для опису напруги на вході трансформатора доцільно використовувати ряд Фур'є двох змінних.

Спектральна компонента $C_{(m_1)(m_2)}$ розраховується за формулою [201]:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{-(2\theta-\delta)}^{\delta} u_g(x_2) e^{jm_2x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) - \right. \\ & - \int_{\pi-(2\theta-\delta)}^{\pi+\delta} u_g(x_2) e^{jm_2x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) + \\ & \int_{\delta}^{\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2\delta} e^{jm_2x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) - \\ & \left. \int_{\pi+\delta}^{2\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2\delta} e^{jm_2x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Завдяки симетрії підінтегральних виразів за змінними x_1 і x_2 , вираз (5.41) спрощується до виду:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{(1 + e^{jm_2\pi})(1 - e^{jm_1\pi})}{2\pi^2} \left(\int_{-(2\theta-\delta)}^{\delta} u_g(x_2) e^{jm_2x_2} dx_2 \times \right. \\ \left. \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 + \int_{\delta}^{\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2\delta} e^{jm_2x_2} dx_1 \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1x_1} dx_1 \right). \quad (5.42)$$

Відповідно до формули (5.42) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ мають ненульові значення для непарних m_1 , і парних m_2 :

$$C_{(2m_1-1)(2m_2)} = \frac{2}{\pi^2} \left(\int_{-(2\theta-\delta)}^{\delta} u_g(x_2) e^{j2m_2x_2} dx_2 \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{j(2m_1-1)x_1} dx_1 + \right. \\ \left. \int_{\delta}^{\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2\delta} e^{j2m_2x_2} dx \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\gamma} e^{j(2m_1-1)x_1} dx_1 \right). \quad (5.43)$$

У результаті підстановки функції напруги мережі $u_g = U_{gm}\cos(x_2)$ та подальшого інтегрування вираз (5.43) перетвориться до виду:

$$C_{(2m_1-1)(2m_2)} = \frac{4U_{gm}(j)^{2m_1-1}}{(2m_1-1)\pi} \sin\left(\frac{\gamma\pi(2m_1-1)}{2}\right) \left(\frac{e^{jm_2\delta}(-jm_2\cos(\delta) - \sin(\delta))}{m_2^2 - 1} + \right. \\ \left. \frac{e^{jm_2(\delta-2\theta)}(jm_2\cos(\delta-2\theta) + \sin(\delta-2\theta))}{m_2^2 - 1} + \right. \\ \left. \frac{\cos(\delta)e^{-\delta^2} e^{jm_2\delta} (1 - e^{-(\pi-2\theta)\delta} (-1)^{m_2} e^{-jm_22\theta})}{\delta - jm_2} \right). \quad (5.44)$$

Коли значення P парне, ненульові значення мають тільки парні гармоніки:

$$C_{2k} = \sum_{m_2=1}^{\infty} C_{(2k-(2m_2-1)\cdot P)(2m_2-1)}, \quad (5.45)$$

а коли непарне – тільки непарні:

$$C_{2k-1} = \sum_{m_2=1}^{\infty} C_{(2k-1-(2m_2-1)\cdot P)(2m_2-1)}. \quad (5.46)$$

Для початкових даних $\delta = \pi / 20$, $P = 20$, $\gamma = 0.5$ на рис. 5.8, а показано спектр напруги на трансформаторі u_{TR} , на рис. 5.8, б – відновлену часову залежність напруги.

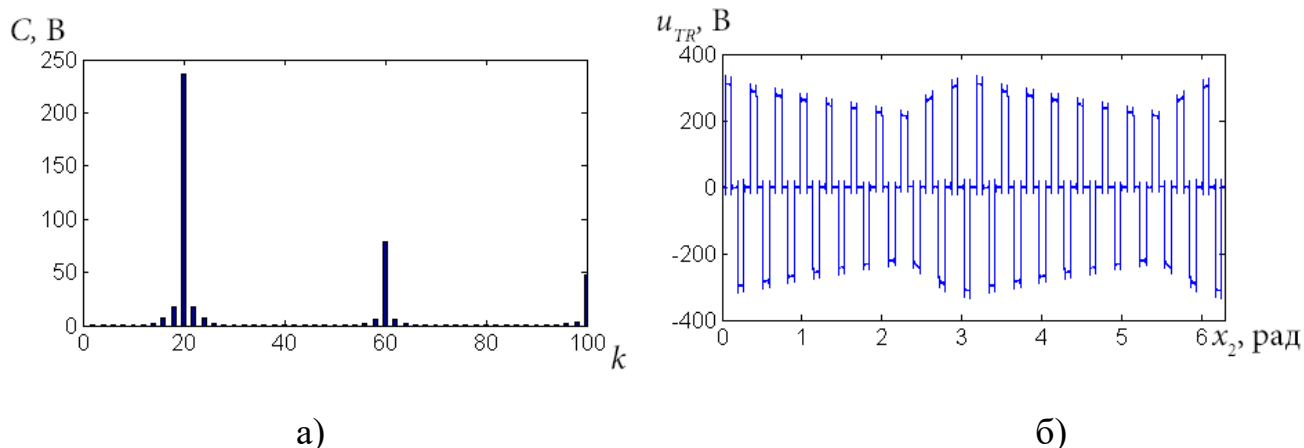


Рис. 5.8. Напруга на вході трансформатора інвертора: а) спектр; б) відновлена часова залежність напруги

З аналізу спектральної характеристики, зображеної на рис. 5.8, а, можна зробити висновок, що найбільше значення має гармоніка, номер якої збігається зі значенням кратності модуляції $k = P = 20$, значення гармонік з меншими номерами швидко спадають до нуля. Тому гармоніки з номером $k < 20$ на переманічування осердя впливають неістотно. Напруга на вході трансформатора, зображена на рис. 5.8, б, є добутком випрямленої напруги і комутувальної функції транзисторів інвертора, що працюють у режимі з постійним заповненням імпульсів γ_{nom} [202].

У випадку, коли кратність модуляції P є дробовим числом:

$$P = \frac{a}{b}, \quad (5.47)$$

період модульованого сигналу T в b разів більший періода модулюючого сигналу T_2 :

$$T = T_1 \cdot b, \quad (5.48)$$

а еквівалентне значення кратності модуляції P^+ дорівнює:

$$P^+ = P \cdot b. \quad (5.49)$$

Для цього випадку розрахунок спектральних компонент $C_{(m1)(m2)}^+$ дещо відрізняється від формули (5.41), оскільки по іншому задається кутова частота напруги мережі, $u_g = U_{gm} \cos(b \cdot x_2)$:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)}^+ = & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{b-1} \left(\int_{-\frac{(2\theta-\delta)}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)}^{\frac{\delta}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)} u_g(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) - \right. \\
& - \int_{\frac{\pi-(2\theta-\delta)}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)}^{\frac{\pi+\delta}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)} u_g(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) + \\
& + \int_{\frac{\delta}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)}^{\frac{\pi-(2\theta-\delta)}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)} u_g(\delta) e^{-x_2 b \delta} e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) - \\
& \left. - \int_{\frac{\pi+\delta}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)}^{\frac{2\pi-(2\theta-\delta)}{b} + \frac{2\pi}{b}(l-1)} u_g(\delta) e^{-x_2 b \delta} e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\gamma} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) \right). \quad (5.50)
\end{aligned}$$

Після врахування симетрії підінтегральних функцій за змінною x_1 вираз (5.50) спроститься до виду:

$$\begin{aligned}
C_{(2m_1-1)(m_2)}^+ = & \frac{2(j)^{2m_1-1} \sum_{l=0}^{b-1} \left(e^{j \frac{2\pi m_2 l}{b}} + e^{j \frac{2\pi m_2 (l+0.5)}{b}} \right)}{\pi^2 (2m_1-1)} \sin\left(\frac{\gamma\pi(2m_1-1)}{2}\right) \times \\
& \left(\int_{-\frac{(2\theta-\delta)}{b}}^{\frac{\delta}{b}} u_g(x_1) e^{jm_2 x_2} dx_2 + \int_{\frac{\delta}{b}}^{\frac{\pi-(2\theta-\delta)}{b}} u_g(\delta) e^{-x_2 b \delta} e^{jm_2 x_2} dx_2 \right). \quad (5.51)
\end{aligned}$$

Відповідно до формули (5.51) інтеграл по змінній x_2 має ненульові значення для значень m_2 , кратних $2b$, $m_1=2b \cdot n$:

$$\begin{aligned}
C_{(2m_1-1)(2bm_2)}^+ = & \frac{4bU_{gm}(j)^{2m_1-1}}{(2m_1-1)\pi} \sin\left(\frac{\gamma\pi(2m_1-1)}{2}\right) \left(\frac{e^{\frac{jm_2\delta}{b}} (-jm_2 \cos(\delta) - \sin(\delta))}{m_2^2 - b^2} + \right. \\
& \left. \frac{e^{jm_2 \frac{\delta-2\theta}{b}} (jm_2 \cos(\delta-2\theta) + \sin(\delta-2\theta))}{m_2^2 - b^2} + \frac{\cos(\delta) e^{-\delta^2} e^{\frac{jm_2\delta}{b}} \left(1 - e^{-(\pi-2\theta)\delta} e^{jm_2 \frac{\pi-2\theta}{b}} \right)}{b \cdot \delta - jm_2} \right). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Спектр напруги, що містить інтергармоніки, розраховується за формулою:

$$C_k = \sum_{m_1=0}^{\infty} C_{(m_1)(k-m_1 \cdot P^+)} = \sum_{m_1=0}^{\infty} C_{(m_1)(k-m_1 bP)} \quad (5.53)$$

Спектр напруги для випадку $P = 13 + 1/3$, $\gamma = 0.8$, $\delta = \pi / 7$ показано на рис. 5.9, а, залежність напруги в часовій області – на рис. 5.9, б.

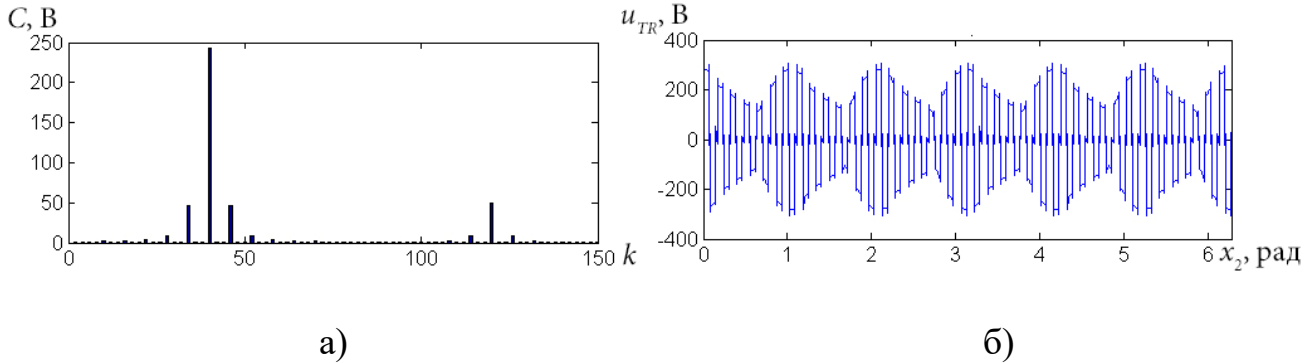


Рис. 5.9. Напруга на вході трансформатора інвертора з інтергармоніками:

а) спектр; б) відновлена часова залежність напруги

З аналізу спектра, рис. 5.9, а, та формули (5.52) можна зробити висновок, що при частоті роботи інвертора, що мінімум на порядок вище ніж частота напруги мережі, суттєвий вплив низькочастотних інтергармонік на роботу трансформатора відсутній. Він може проявлятися тільки за умови невеликих значень параметра P . Розглянемо два випадки невеликих значень $P = 3/2$ і $P = 4/3$, коли параметр a , формула (5.47), є непарним і парним відповідно. Для випадку $\gamma = 0.3$, $\delta = \pi / 7$, спектр напруги для яких зображено на рис. 5.10, а і б відповідно.

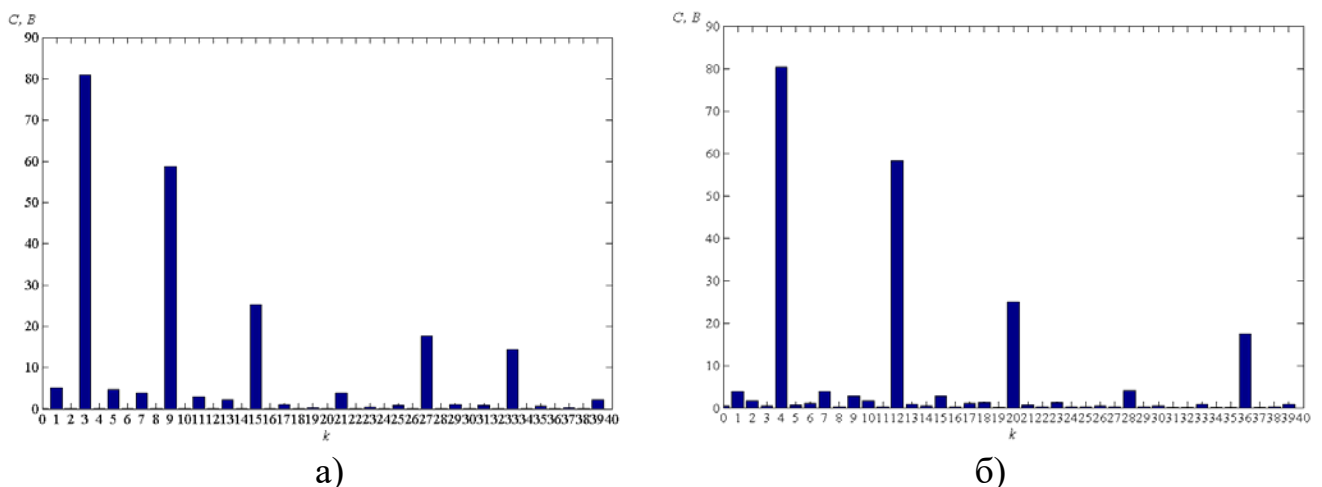


Рис. 5.10. Спектр напруги при: а) $P = 3/2$; б) $P = 4/3$

Для випадку $P = 3/2$ у спектрі присутні лише непарні гармоніки, основна гармоніка $k = P^* = 2P = 3$ має найбільше значення. Низькочастотна інтергармоніка з номером $k = 1$ має амплітуду, що складає 5 % від основної. Орієнтовно такі ж значення мають інтергармоніки з номерами 5 і 7. Їх сумарний вплив є доволі суттєвим і сумарно зменшує потужність трансформатора на 10 %. Для випадку $P = 4/3$ у спектрі присутні як парні так і непарні інтергармоніки, а також постійна складова, ($C_0 = 0.5$ %, $C_1 = 5$ %, $C_2 = 2$ %, $C_3 = 0.7$ %) тому їх сумарний вплив разом з високочастотними інтергармоніками з номерами $k = 5..11$ на перемагнічування є суттєвішим, ніж у попередньому випадку і може призводити до підмагнічування трансформатора та зменшення його еквівалентної потужності орієнтовно до 20 %. Тобто при дробових кратностях модуляції, що не перевищують 10, $P < 10$, для зменшення негативного впливу інтергармонік на трансформатор рекомендовано обирати значення P з непарним значенням параметра a .

Аналогічно розраховуються спектральні компоненти $C_{(m1)(m2)}$ напруги на вході трансформатора зі зворотним зв'язком. Аналітичний вираз спектральних компонент для цього випадку наведено у додатку Г.

Загалом, розрахунок аналітичного виразу для спектральних компонент і формули для розрахунку амплітуд гармонік для системи зі зворотним зв'язком є аналогічними системі без зворотного зв'язку.

5.4. Інтергармоніки в перетворювачі частотно-регульованого електроприводу асинхронного двигуна

Асинхронний двигун як різконелінійне навантаження, у якому електромагнітна енергія перетворюється у механічну в широкому діапазоні робочих частот, може бути джерелом інтергармонік, що спричиняють його нагрівання, вібрацію, погіршують стабільність роботи [203-206]. Для аналізу причин виникнення інтергармонік розглянемо модель електропривода.

5.4.1. Модель системи електроживлення електропривода асинхронного двигуна

Електропривод асинхронного двигуна зазвичай живиться від трифазної напруги 3х380 В, 50 Гц. До його складу входить трифазний мостовий некерований випрямляч, ємнісний фільтр і трифазний мостовий інвертор [207-210].

За умови використання спеціалізованих методів модуляції – векторної ШІМ або ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою діюче значення напруги на виході електропривода також досягає 380 В, що дозволяє максимально використовувати момент двигуна.

Через пульсації випрямленої напруги, частота яких становить $f_{\Pi} = 300$ Гц, в трифазній нарузі електропривода виникають інтергармоніки, частота і значення яких залежать від частоти напруги, що формується інвертором. Для дослідження параметрів інтергармонік визначимо форму напруги на конденсаторі фільтра. Модель для визначення напруги на конденсаторі фільтра показано на рис. 5.11 [211, 212].

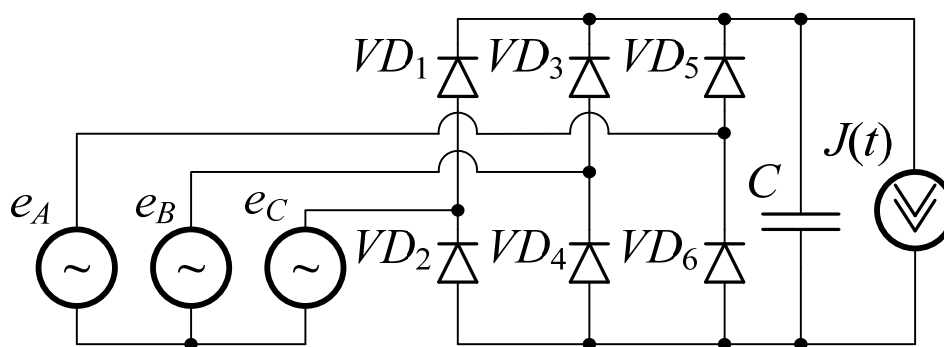


Рис. 5.11. Модель для визначення напруги на конденсаторі фільтра

Вхідна ланка електропривода складається з трифазної системи напруг e_A , e_B , e_C , трифазного випрямляча на діодах VD_1 - VD_6 , конденсатора C ланки постійного струму та джерела струму $J(t)$, сила струму якого відповідає вхідному струму трьох фаз інвертора. Оскільки високочастотна складова струму фаз електропривода майже повністю усувається фільтром, вхідний струм електропривода можна записати наступним чином:

$$J(t) = |i_A(t)| + |i_B(t)| + |i_C(t)| = \\ = I_m (|\sin(2\pi f_r t)| + |\sin(2\pi f_r t - 2\pi/3)| + |\sin(2\pi f_r t - 4\pi/3)|), \quad (5.54)$$

де f_r – частота обертання двигуна, I_m – амплітуда струму фази двигуна.

Розкривши модуль у виразі (5.54), отримаємо:

$$J(t) = 2I_m \cos(2\pi f_r t - \pi/6), (n-1)\pi/3 \leq 2\pi f_r t < n\pi/3, n=1,2,3,4,5,6, \quad (5.55)$$

тобто струм, що споживається електроприводом, знаходиться в межах $J(t) \in [\sqrt{3}I_m; 2I_m]$ і має пульсацію біля 6.7 %. Оскільки частота пульсації випрямленої напруги $f_p = 6f_g$ загалом не співпадає з частотою пульсації струму електропривода $f_c = 6f_r$, період напруги на конденсаторі T_{Uc} розраховується як найменше спільне кратне періодів пульсацій, $T_{Uc} = Lcm(T_p; T_c)$. Тому вираз для напруги на конденсаторі безпосередньо можна записати лише для випадку, коли вона співпадає з напругою мережі:

$$u_c(x_3) = U_m \cos((x_3 - \pi)/6), \varphi_1 \leq x_3 < \varphi_2, \quad (5.56)$$

де $x_3 = 2\pi f_p t$, φ_1, φ_2 – кути, що визначають інтервал відкритого стану вентилів випрямляча.

Значення кута φ_1 також визначає коефіцієнт пульсації випрямленої напруги K_{II} :

$$K_{II} = \frac{1 - \cos((\varphi_1 - \pi)/6)}{2}. \quad (5.57)$$

Залежність напруги на інтервалі $\varphi_2 \leq \varphi < 2\pi + \varphi_1$, розраховується з диференційного рівняння

$$C \frac{du_c}{dx_3} = -J(x_2 + \varphi_0), \quad (5.58)$$

де $x_2 = 2\pi f_r t$, φ_0 – початкова фаза струму відносно випрямленої напруги.

Вираз для опису струму електропривода (5.54) є кусково неперервним. Зважаючи на це, для коректного рішення диференційного рівняння доцільно задати вираз для розрахунку струму у формі, дійсній для всього діапазону значень аргументу, для якого шукається розв'язок:

$$J(x_2 + \varphi_0) = 2I_m \cos\left(x_2 + \varphi_0 - \pi/6 - \pi/3 \left\lfloor \frac{x_2 + \varphi_0 - \pi/6}{\pi/3} \right\rfloor\right), \quad (5.59)$$

що дозволяє коректно задати форму струму на довільному інтервалі.

Для розрахунку кута φ_2 , при якому закриваються вентилі випрямляча, достатньо порахувати похідну від випрямленої напруги (5.61) і підставити її у формулу (5.58):

$$\varphi_2 = 6 \arcsin \left(\frac{6J(x_2 + \varphi_0)}{U_m C} \right) + \pi. \quad (5.60)$$

Значення параметра φ_0 при розрахунку інтергармонік можна розглядати як накопичення різниці фаз між двома величинами – частотою пульсації випрямленої напруги і частотою обертання двигуна відносно змінної x_2 :

$$\varphi_0 = x_2 - x_2 P_2, \quad (5.61)$$

де P_2 –кратність частоти пульсації напруги мережі відносно частоти обертання двигуна, $P_2 = x_3 / x_2$.

Аналітичний вираз напруги на інтервалі $\varphi_2 \leq \varphi < 2\pi + \varphi_1$ є розв'язком диференційного рівняння (5.58).

$$\begin{aligned} u_c(x_3) = & -\frac{1}{C} \int_{\varphi_2}^{x_3} J(x_2 + \varphi_0) dx'_3 = -\frac{1}{C} \int_{\varphi_2}^{x_3} J \left(2 \frac{x'_3}{P_2} - x'_3 \right) dx'_3 = U_m \cos((\varphi_2 - \pi) / 6) + \\ & \frac{12I_m P_2}{C(2 - P_2)} \left(\sin \left(\left(x_3 \frac{2 - P_2}{6P_2} - \pi / 3 \left\lfloor \frac{x_3}{\pi / 3} \frac{2 - P_2}{6P_2} \right\rfloor \right) - \pi / 6 \right) - \right. \\ & \left. - \sin \left(\left(\varphi_2 \frac{2 - P_2}{6P_2} - \pi / 3 \left\lfloor \frac{\varphi_2}{\pi / 3} \frac{2 - P_2}{6P_2} \right\rfloor \right) - \pi / 6 \right) + \left\lfloor x_3 - \varphi_2 \right\rfloor \frac{2 - P_2}{6P_2} \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Наведені формули використовують для розрахунку інтергармонік на основі узагальненого ряду Фур'є для довільного співвідношення частоти мережі і частоти обертання двигуна.

5.4.2. Розрахунок спектральних компонент узагальненого ряду Фур'є

Згідно з розглянутою моделлю електропривода, інтергармоніки струму електропривода утворюються внаслідок взаємодії трьох процесів: пульсації випрямленої і відфільтрованої напруги з частотою f_p , пульсації сумарного струму електропривода з частотою f_c та носійної функції модуляції струмів фаз електропривода з частотою f_H . Тому для визначення інтергармонік, що виникають

в системі, доцільно використовувати три змінні, $M = 3$, в ряді Фур'є, а саме $x_1 = 2\pi f_H t$, $x_2 = 2\pi f_{rt} t$, $x_3 = 2\pi f_{pt} t$. В цьому випадку вираз для розрахунку спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}$ за умовою модуляції напруги однополярною ШІМ з передмодуляцією третьою гармонікою дорівнює (див. табл. 2.4):

$$C_{(m_1)(m_2)(m_3)} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} e^{jm_2 x_2} \left(\int_{\pi(1-\mu^*(\sin(x_2') + a^* \sin(3x_2')))}^{\pi(1+\mu^*(\sin(x_2') + a^* \sin(3x_2')))} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) \times \\ \times \left(\int_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} U_m \cos((x_3 - \pi) / 6) e^{jm_3 x_3} dx_3 + \int_{\varphi_2(x_2)}^{2\pi + \varphi_1(x_2)} u_C(x_3) e^{jm_3 x_3} dx_3 \right) dx_2, \quad (5.63)$$

де x_2' - зафіксоване значення змінної x_2 на початку кожного наступного періода.

При розрахунку спектра напруги фази при заданому співвідношенні частот ШІМ напруги мережі та електропривода, у формулі (5.63) підставляються відповідні значення кратностей модуляції $P = x_1 / x_2$ для ШІМ та $P_3 = x_3 / x_2$ з урахуванням фазового зміщення фаз B і C відносно фази A . Сумарне значення гармоніки напруги фази A двигуна з номером k , $C_{A0(k)}$ визначається з формули [202]:

$$C_{A0(k)} = \frac{2}{3} C_{A(k)} - \frac{1}{3} (C_{B(k)} + C_{C(k)}), \quad (5.64)$$

де $C_{A(k)}$, $C_{B(k)}$, $C_{C(k)}$ - значення гармонік з номером k відповідних фаз інвертора.

Для випадку співвідношень кратностей модуляцій $P = 30$, $P_3 = 5/3$, глибини модуляції $\mu = 0.5$, спектр модульованої напруги фази двигуна, розрахований за формулами (5.54)-(5.64) показано на рис. 5.12, для випрямленої напруги без пульсацій (ідеальний фільтр), що показані чорним кольором, та з коефіцієнтом пульсації напруги $K_{\Pi} = 6.7 \%$ (відсутність фільтра), що спричинило появу інтергармонік, показаних сірим кольором.

Для випадку $P_3 = 5/3$, «основні гармоніки», кратні частоті обертання двигуна, мають номери кратні трьом, $k = 3, 9, 15, 2l+1$, гармоніка, що задає частоту обертання двигуна $k = 3$. Непарні гармоніки, не кратні трьом, є інтергармоніками, що утворені внаслідок модуляції напруг фаз двигуна пульсацією випрямленої напруги.

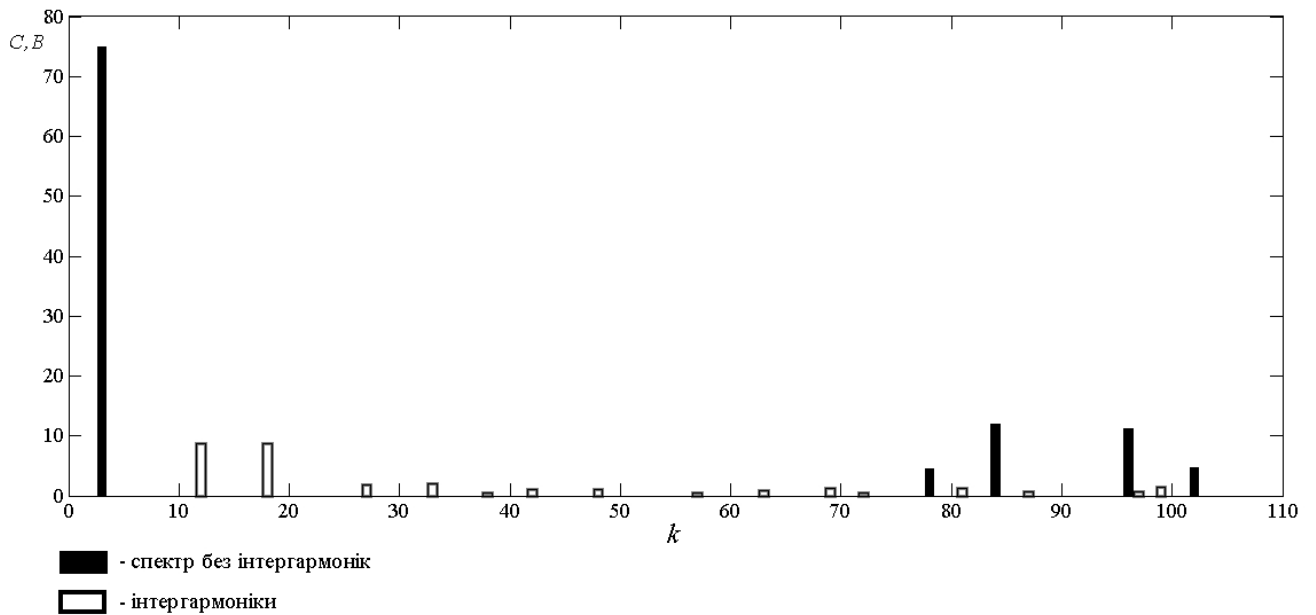


Рис. 5.12. Спектр модульованої напруги фази двигуна

Зрозуміло, що на практиці коефіцієнт пульсації напруги i , як наслідок, значення інтергармонік є значно меншими, однак навіть вони можуть спричинити значне підмагнічування двигуна. Тому доцільно проаналізувати кількісні показники негативного впливу інтергармонік залежно від значення параметра P_3 та ємності фільтра випрямляча [210], які описуються у просторі декількох змінних, оскільки співвідношення між частотами напруги мережі, ШІМ і частоти обертання двигуна можуть бути довільними, в тому числі дробовими.

5.4.3. Аналіз впливу інтергармонік на асинхронний двигун

Інтергармоніки створюють додаткове підмагнічування магнітопровода асинхронного двигуна, що зменшує його вихідну потужність та спричинює додаткові втрати. На відміну від вищих гармонік, спричинених модуляцією напруги, інтергармоніки, викликані пульсацією випрямленої напруги, можуть мати нижчу або того ж порядку частоту, що і основна гармоніка, та не придушуватимуться фільтром. Тому інтергармоніки можуть істотно підмагнічувати асинхронний двигун, що оцінюються за допомогою коефіцієнта підмагнічування B , розрахованого за формулою:

$$B = \frac{n_1 \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{C_{i(k)}^2}{k^2}}}{I_{\max}}, \quad (5.65)$$

де n_1 – номер основної гармоніки, $C_{i(k)}$ – діюче значення інтергармоніки з номером k , I_{\max} – номінальне діюче значення струму фази двигуна.

Ділення на номер інтергармоніки k в формулі (5.65) відображає збільшення ефекту намагнічування сталі двигуна зі зменшенням частоти інтергармоніки. Кількість інтергармонік q , які впливають на підмагнічування двигуна, визначається залежно від частоти зрізу фільтра f_{zp} , що зазвичай обирається так, щоб група вищих гармонік що утворюється навколо гармоніки з номером $n_1 \cdot P$ була повністю придушена. Тому частоту зрізу фільтра задають з умови $f_{zp} \approx n_1 \cdot P / 2$. Ця оцінка частоти зрізу використана для оцінки кількості інтергармонік q

$$q = [f_{zp} / f_1], \quad (5.66)$$

де f_1 – частота першої інтергармоніки.

Як правило кратність модуляції P обирається такою, щоб частота ШІМ була рівною або перевищувала 20 кГц для усунення акустичних шумів, які може чути людина, тому частоту зрізу фільтра доцільно обрати на рівні 10 кГц, $f_{zp} = 10$ кГц.

Коефіцієнт підмагнічування B (5.65) розраховується для різного рівня пульсації випрямленої напруги K_{Π} , починаючи з максимального значення $K_{\Pi \max} = 6.7\%$, до мінімального значення $K_{\Pi \min} = 0\%$. Розрахунки коефіцієнта B проводяться для глибин модуляції μ в діапазоні $[0.1; 1]$ з кроком $\Delta\mu = 0.1$, для частот обертання двигуна f_c в діапазоні $[1 \text{ Гц}; 100 \text{ Гц}]$ з кроком $\Delta f = 1 \text{ Гц}$.

Залежність коефіцієнта B від коефіцієнта пульсації K_{Π} та частоти обертання двигуна f_c для глибини модуляції $\mu = 1$ показано на рис. 5.13, а, на рис 5.13, б показано значення коефіцієнта B для випадку $K_{\Pi} = 6.7\%$.

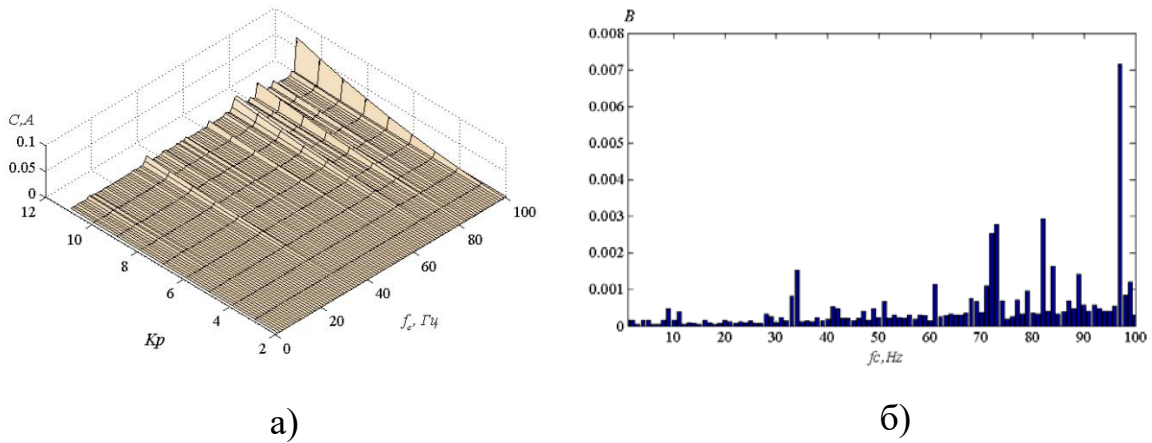


Рис. 5.13. Залежність коефіцієнта B : а) від коефіцієнта пульсації K_p і частоти обертання двигуна f_c ; б) значення коефіцієнта B для випадку $K_p = 6.7\%$

Як видно з графіків, наведені на рис. 5.13 найбільше значення коефіцієнт B має для частоти обертання з найбільшим кратним періодом $f_{c\max} = 97$ Гц, для якої $B = 0.007$.

Перевірка розрахованих параметрів здійснена на основі моделі, створеної в середовищі MatLab Simulink®, що зображена на рис. 5.14. Модель складається з моделей випрямляча на діодах VD1-VD6, ємнісного фільтра на конденсаторі C та трифазного інвертора на транзисторах VT1-VT6. Система керування трифазним інвертором на основі джерел опорної напруги Ima , Imb , Imc , що містять третю гармоніку, формує ШІМ сигнал керування транзисторами інвертора.

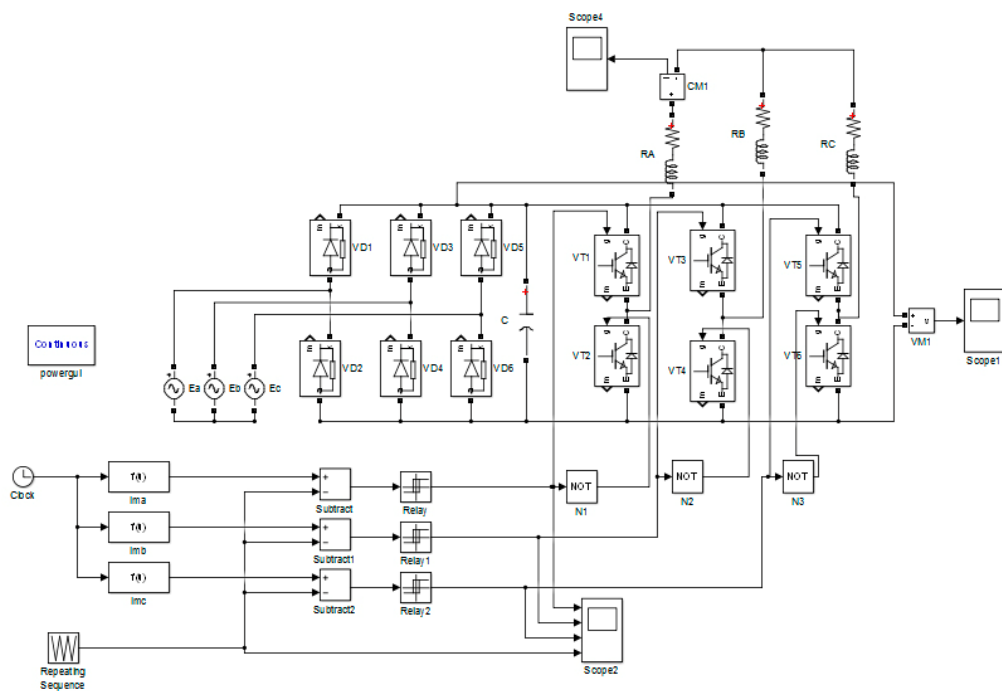


Рис. 5.14. Simulink модель електропривода

На рис. 5.15, а показано типову діаграму струму фази інвертора, що містить інтергармоніки, та його спектр для випадку частоти обертання електроприводу $f_c = 33$ Гц, рис. 5.15, б. У цьому випадку період, на якому розраховується спектр, визначається як найменше спільне кратне періодів пульсації випрямленої напруги і періода обертання електропривода: $T_{Lcm} = Lcm(T_C, T_p) = 1/3$. Тому номер основної гармоніки k_r , що обертає двигун, рівний $k_r = T_{Lcm} / T_C = 11$.

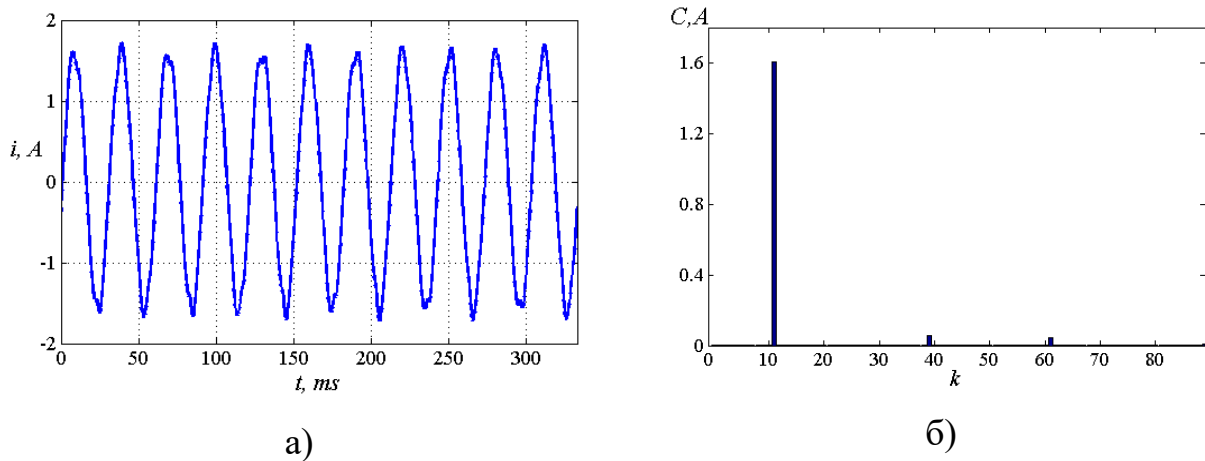


Рис. 5.15. Типова часова діаграма струму фази інвертора а) та його спектр б)

Через присутність у спектрі струму інтергармонік з номерами $k = 39$, $k = 61$ струм фаз двигуна має спотворену форму, що погіршує режим роботи двигуна та створює додаткове підмагнічування.

На основі моделі Simulink було перевірено коректність розрахунку спектра струму за допомогою узагальненого ряду Фур'є, формули (5.63), (5.64). У результаті порівняння розрахунків, виявлено, що похибка результатів, отриманих на основі ряду Фур'є не перевищує 5 %.

5.4.4. Аналіз інтергармонічних складових електропривода

Через складність процесів у електроприводі значення інтергармонік у попередньому параграфі розраховано у чисельному виді. Однак, для пошуку режимів роботи електропривода, в яких підмагнічування суттєво впливає на його роботу, доцільно представити спектр в аналітичній формі, що можливо зробити лише при спрощені моделі процесів у ньому, що не суттєво впливають на розрахунок інтергармонік. Проведемо оцінку інтергармонічних складових спектра,

для чого використано простіший метод модуляції – однополярну ШІМ-II та режим з максимальною вхідною пульсацією напруги, що досягається за відсутності вхідного ємнісного фільтра. Такі спрощення загалом дають можливість отримати верхню оцінку значень інтергармонік для довільного співвідношення частоти електропривода та напруги мережі. Для цього випадку випрямлена напруга мережі задається рівнянням (5.56), де $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = \pi$. Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}$ розраховуються за формулою:

$$C_{(m_1)(m_2)(m_3)} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\pi e^{jm_2x_2} \left(\int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \times \\ \times \left(\int_{-\pi}^\pi U_m \cos((x_3 - \pi)/6) e^{jm_3x_3} dx_3 \right) dx_2 - \frac{1}{4\pi^3} \int_\pi^{2\pi} e^{jm_2x_2} \left(\int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \times \\ \times \left(\int_0^{2\pi} U_m \cos((x_3 - \pi)/6) e^{jm_3x_3} dx_3 \right) dx_2. \quad (5.67)$$

З врахуванням непарності підінтегрального виразу (5.67) за змінною x_2 , його можна спростити до виду:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)(m_3)} = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x_2} \left(\int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \times \\ \times \left(\int_0^{2\pi} U_m \cos((x_3 - \pi)/6) e^{jm_3x_3} dx_3 \right) dx_2. \quad (5.68)$$

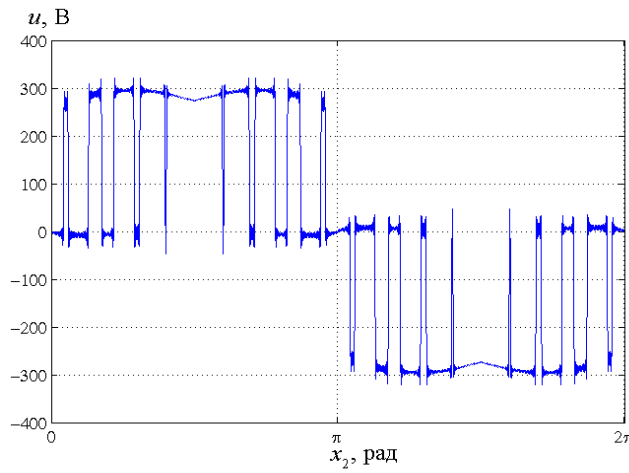
Після інтегрування вираз (5.68) зводиться до виду:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)(m_3)} = -\frac{6U_m j(-1)^{m_1}}{\pi^2 m_1 (36m_3^2 - 1)} J_{2m_2-1}(m_1 \pi \mu). \quad (5.68a)$$

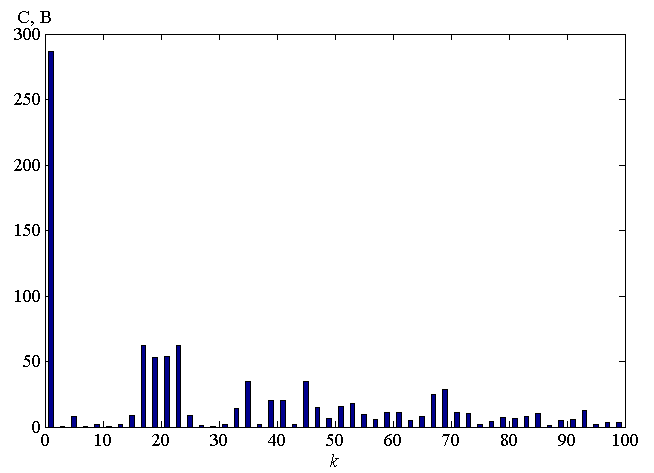
Для випадку $m_1 = 0$, отримаємо

$$C_{(0)(1)(m_3)} = -\frac{3U_m j(-1)^{m_1}}{\pi(36m_3^2 - 1)}; \\ C_{(0)(-1)(m_3)} = \frac{3U_m j(-1)^{m_1}}{\pi(36m_3^2 - 1)}; \\ C_{(0)(2m_2-1)(m_3)} = 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1. \quad (5.69)$$

Форма напруги на виході плеча мостового інвертора для випадку $P = 20$, $P_3 = 4$, $\mu = 1$, $U_m = 300$ В показана на рис. 5.16, а, а її спектр – на рис. 5.16, б.



а)



б)

Рис. 5.16. Форма напруги на вході фази асинхронного двигуна а) та її спектр б)

Пульсації випрямленої напруги, зображені на рис. 5.16, а, спричиняють збільшення значення низькочастотних гармонік з номером $k = 5$ і вище, що погіршує режим роботи двигуна.

У випадку дробового значення хоча б одного з параметрів кратності модуляції P , P_3 з'являються інтергармоніки і відповідно до формули (5.1) розраховується найменше спільне кратне V та кратності модуляції P^+ , P_3^+ на періоді визначення спектра:

$$P^+ = V \cdot P; \quad (5.70)$$

$$P_3^+ = V \cdot P_3. \quad (5.71)$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+$ для режиму з інтергармоніками розраховуються за формулою:

$$C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+ = \frac{1}{4\pi^3} \sum_{l=1}^V \left(\int_{\frac{2\pi(l-1)}{V}}^{\frac{2\pi(l-1)+\pi}{V}} e^{jm_2x_2} \left(\int_{\pi(1-\mu \sin(Vx_2))}^{\pi(1+\mu \sin(Vx_2))} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \times \right. \\ \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} U_m \cos((x_3 - \pi) / 6) e^{jm_3x_3} dx_3 \right) dx_2 - \int_{\frac{2\pi(l-1)+\pi}{V}}^{\frac{2\pi l}{V}} e^{jm_2x_2} \left(\int_{\pi(1+\mu \sin(Vx_2))}^{\pi(1-\mu \sin(Vx_2))} e^{jm_1x_1} dx_1 \right) \times \\ \times \left(\int_0^{2\pi} U_m \cos((x_3 - \pi) / 6) e^{jm_3x_3} dx_3 \right) dx_2 \Bigg). \quad (5.72)$$

У формулі (5.72) у порівнянні з формулою (5.68) змінились лише межі інтегрування за змінною x_2 та додалась операція сумування. У результаті інтегрування формули, отримано результат:

$$C_{(m_1)(V(2m_2-1))(m_3)}^+ = -\frac{6U_m j(-1)^{m_1}}{\pi^2 m_1 (36m_3^2 - 1)} J_{2m_2-1}(m_1 \pi \mu); \quad (5.73)$$

$$C_{(0)(V)(m_3)}^+ = -\frac{3\mu U_m j(-1)^{m_3}}{\pi(36m_3^2 - 1)};$$

$$C_{(0)(-V)(m_3)}^+ = \frac{3\mu U_m j(-1)^{m_3}}{\pi(36m_3^2 - 1)};$$

$$C_{(0)(V(2m_2-1))(m_3)}^+ = 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0.$$

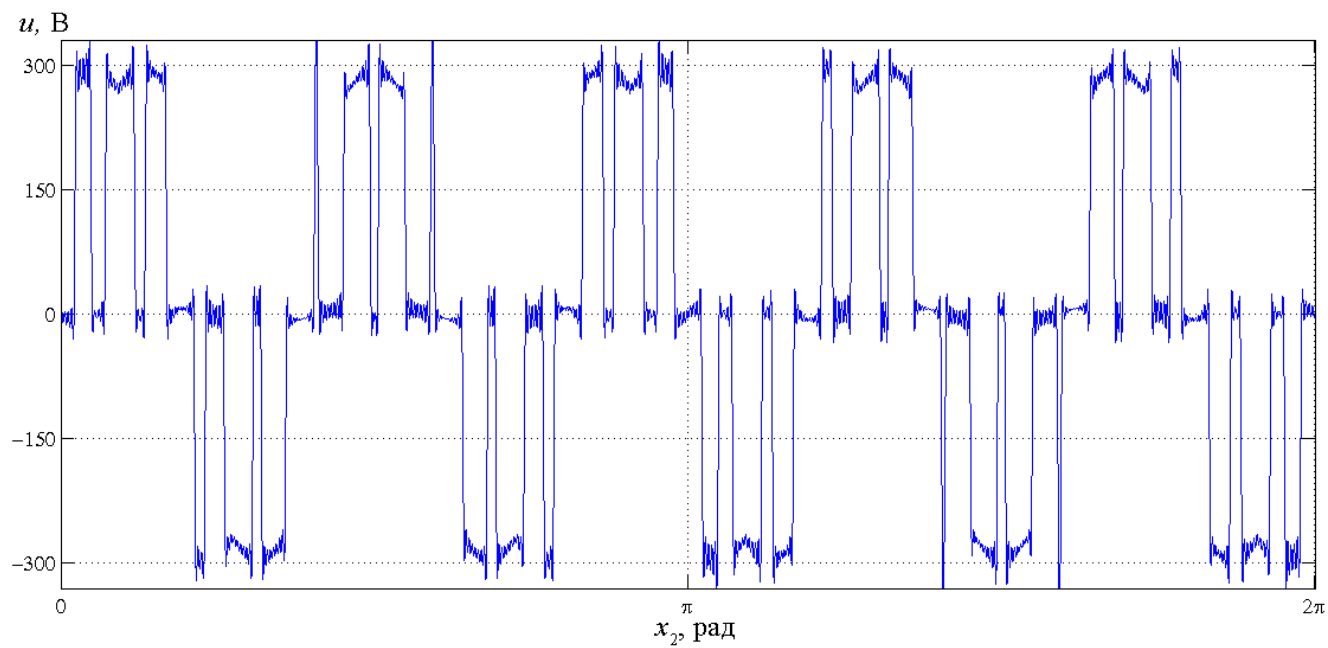
При порівнянні формул (5.73) з формулами (5.68а) і (5.59) можна зробити висновок, що їх єдиною відмінністю є поява множника V у індексі за змінною x_2 . Формула для розрахунку гармоніки з номером $2k - 1$ є такою:

$$C_{2k-1} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} C_{(m_1)(2k-1-m_1P^+-m_3P_3^+)(m_3)}^+, 2k-1-m_1P^+-m_3P_3^+=lV, \quad (5.74)$$

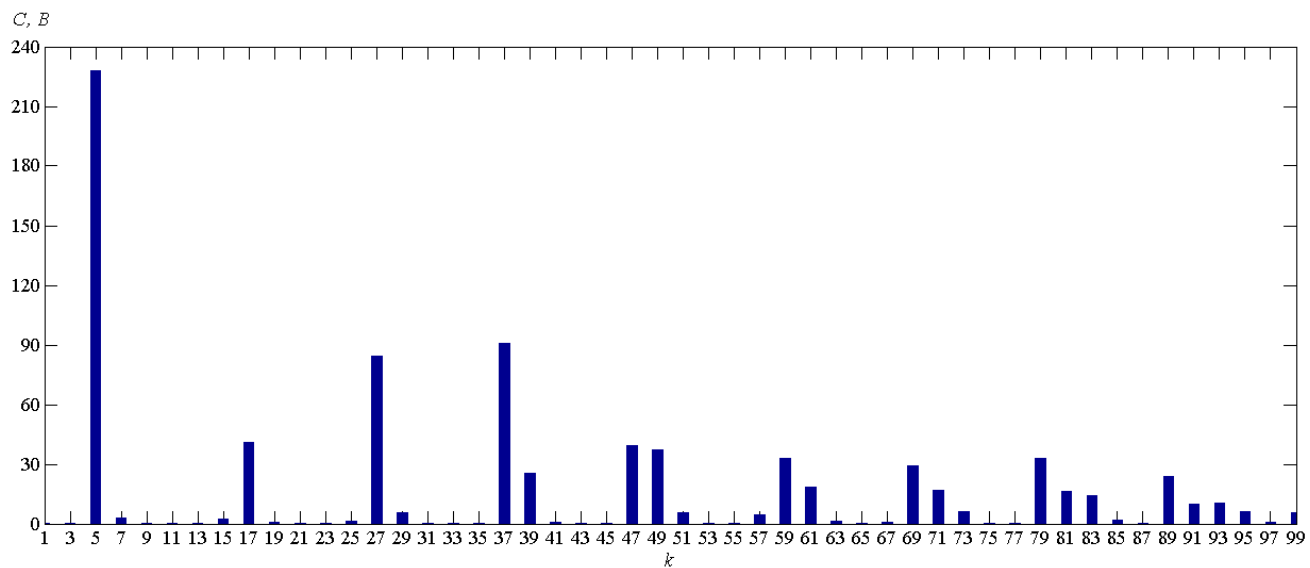
де l – непарне число.

Формула (5.74) використана для розрахунку спектра модульованої напруги з параметрами $P = 6.4$, $P_3 = 4.4$, $\mu = 0.8$, $U_m = 300$ В. Форма напруги на виході плеча мостового інвертора та її спектр показані на рис. 5.17, а та б відповідно.

Як видно з рис. 5.17, а кратність модуляції P на 1, 3, 5 періодах складає шість, $P = 6$, а на 2, 4 – $P = 7$, що є результатом дробового значення кратності модуляції $P = 6.4$, що разом з пульсацією напруги створюють інтергармонічні спотворення. У спектрі, зображеному на рис. 5.17, б, перша гармоніка модулюючої функції відповідає номеру гармоніки $k = 5$, всі інші гармоніки, що мають значення істотно відмінні від нуля, є інтергармоніками, оскільки їх значення не кратні п'яти, а саме $k = 17, 27, 37, 39, 47, 49, 59, 61, 69, 71$ і т.д., що суттєво погіршують режим роботи двигуна.



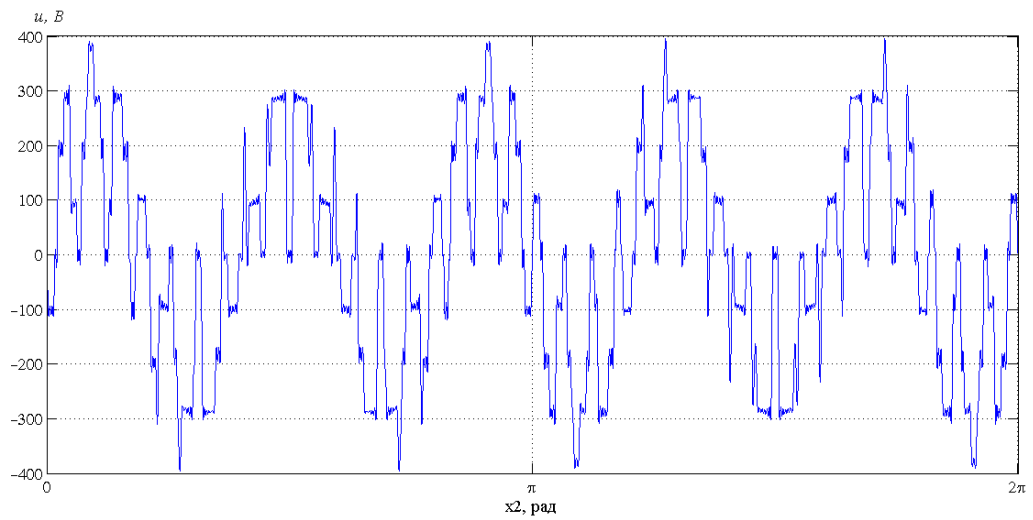
а)



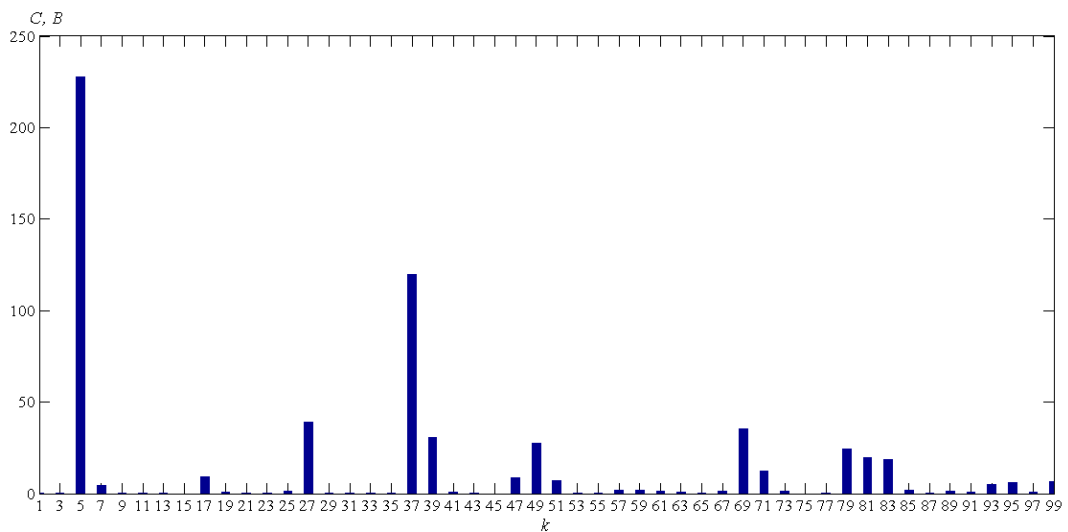
б)

Рис. 5.17. Форма напруги а) та спектр модульованої напруги з інтергармоніками б)

Для розрахунку напруги фази A двигуна використовується формула (5.64), форма напруги фази A двигуна показана на рис. 5.18, а, а її спектр – на рис. 5.18, б.



а)



б)

Рис. 5.18. Форма напруги фази A двигуна а) та її спектр б)

Спектр напруги фази, рис. 5.18, б відрізняється від спектра напруги плеча інвертора, рис. 5.17, б, тим що гармоніки кратні $3 \cdot V$ (15, 45, 75 і т.д.) дорівнюють нулю. Для оцінки параметрів якості струму фаз двигуна та мережі з урахуванням інтергармонік та виявлення найбільш несприятливих режимів роботи проаналізуємо значення параметрів якості електроенергії з урахуванням інтергармонік.

5.4.5. Параметри якості струму фаз двигуна з урахуванням інтергармонік

Низькочастотні інтергармоніки на відміну від вищих гармонік, причиною виникнення яких є модуляція напруги, не усуваються індуктивністю фаз двигуна,

оскільки їх частота має той же порядок, що і перша гармоніка струму. Тому їх негативний вплив на двигун не може бути усунутий у звичний спосіб – встановленням додаткових фільтрів.

Параметри якості електроенергії, що використовуються у дослідженні для кількісної оцінки впливу інтергармонік на двигун, є такими:

- коефіцієнт підмагнічування B , розрахований за формулою (5.65);
- коефіцієнт низькочастотних нелінійних спотворень THD_{lf} :

$$THD_{lf} = \frac{\sqrt{\sum_{k \in \Lambda} Y_k^2}}{Y_1}, \quad (5.75)$$

де Λ – множина низькочастотних гармонік, включно з інтергармоніками, Y_1 – діюче значення першої гармоніки, Y_k – діюче значення низькочастотних гармонік. Значення параметра THD_{lf} показує до якого граничного значення можуть бути зменшені нелінійні спотворення струму, за умови використання фільтра.

Значення параметрів B і THD_{lf} залежать від параметрів модуляції: P , P_3 , μ і при певних комбінаціях значень параметрів модуляції, значення параметрів якості електроенергії можуть мати критично несприятливі значення. Тому є доцільним:

- вивести формули розрахунку параметрів B і THD_{lf} як функції параметрів модуляції;
- проаналізувати комбінації параметрів модуляції, що призводять до критично несприятливих значень параметрів B і THD_{lf} ;
- запропонувати способи покращення параметрів B і THD_{lf} .

Зрозуміло, що найгірші значення параметрів B і THD_{lf} спостерігаються при менших значеннях параметрів кратності модуляції P і P_3 . Зважаючи на те, що малі значення P і P_3 не використовуються на практиці, при подальшому аналізі доцільно обмежити значення цих параметрів знизу. Оскільки частота пульсації f_{II} випрямленої напруги промислової частот 50 Гц складає, $f_{II} = 300$ Гц, частота носійної функції трифазної напруги f_H , як правило, перевищує 20 кГц, а частота обертання двигуна f_M знаходиться в діапазоні 0..100 Гц, можна зробити висновок, що $P_3 \geq 3$, $P \geq 200$, тобто $P_3 \ll P$.

При розрахунку параметрів варто враховувати лише низькочастотні гармоніки та інтергармоніки, які не придушуються фільтром. Оскільки фільтри налаштовані на вищі гармоніки з частотою близькою до значення носійної частоти f_H , номер гармоніки якої дорівнює $P \cdot V$, номери інтергармонік k_i , що необхідно враховувати при розрахунку B і THD_{lf} доцільно обмежити діапазоном $k_i \in [1; P \cdot V/2]$.

Перед розрахунком параметрів B і THD_{lf} проаналізуємо значення параметрів m_1, m_2, m_3 у формулах (5.73), (5.74). З аналізу цих формул можна зробити висновок, що при збільшенні модуля значення параметра m_3 значення спектральних компонент $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^+$ дуже швидко спадає до нуля. Тому доцільним є врахування інтергармонік з невеликими значеннями параметра m_3 . З іншого боку при розрахунку спектра за формулою (5.74), номер гармоніки розраховується із співвідношення:

$$k_i = m_1 P^+ + m_2 V + m_3 P_3^+. \quad (5.76)$$

Згідно з формулою (5.76) основною причиною різкого збільшення значення параметра m_3 при $k_i \in [1; P \cdot V/2]$ є зростання по модулю параметра m_1 . Наприклад при $k_i = 1, P_3^+ = 3, P^+ = 200, V = 3, m_2 = 1$, маємо: при $m_1 = 0, m_3 \approx -1$; при $m_1 = 1, m_3 \approx -67$; при $m_1 = 2, m_3 = -134$, що підтверджує наведене твердження. З наведеного аналізу можна зробити висновок, що за умови $P_3 \ll P$, спектральні складові $C_{(m_1)(m_2)(m_3)}^*$ мають значення істотно відмінні від нуля лише для випадку $m_1 = 0$. Для цього випадку спектральні компоненти розраховуються за формулою (5.73).

Відповідно до формул (5.73) та (5.74) для гармоніки з номером $2k_i - 1$, значення параметра m_3 може мати два значення, що розраховуються з таких формул:

$$2k_i - 1 = V + m_3 P_3^+, m_3 \in N; \quad (5.77)$$

$$2k_i - 1 = -V + m_3 P_3^+, m_3 \in N. \quad (5.78)$$

При підстановці значень $m_3 = 1, 2..l$, з рівнянь (5.77) і (5.78) розраховуються номери ненульових низькочастотних гармонік. На основі розглянутих міркувань та з врахуванням формули (5.65) формули для розрахунку параметрів B і THD_{lf} є такими:

$$THD_{lf} = \frac{1}{\mu} \sqrt{2 \sum_{m_3=1}^M \frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(2k_i-1)/(3V)} + e^{-j2\pi(2k_i-1)/(3V)} \right) \right)^2}; \quad (5.79)$$

$$B = V \sqrt{2 \sum_{m_3=1}^M \frac{1}{(2k_i - 1)^2 (36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(2k_i-1)/(3V)} + e^{-j2\pi(2k_i-1)/(3V)} \right) \right)^2}. \quad (5.80)$$

Послідовність аналітичних перетворень виразів параметрів B і THD_{lf} (5.79) і (5.80) для отримання значень цих параметрів у згорнутій аналітичній формі наведена у додатку Г, кінцеві вирази є такими:

$$THD_{lf \min} = \frac{0.0236}{\mu}; \quad (5.81)$$

$$THD_{lf \max} = \frac{0.0688}{\mu}. \quad (5.82)$$

$$B = \frac{2}{36\sqrt{3}} \left(\frac{1}{P_3^2} \left(\frac{\pi^6}{945} + \left(\frac{3}{P_3^2} + \frac{1}{36^2} \right) \frac{\pi^8}{9450} + \frac{3}{36^2} \frac{\pi^{10}}{93555P_3^2} - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{3} P_3 \right) \left(1 + \left(\frac{1}{3P_3^2} + \frac{1}{36^2} \right) + \frac{3}{36^2 P_3^2} \right) \right) \right)^{0.5}. \quad (5.83)$$

Слід зазначити, що мінімальне значення $THD_{lf \min}$ відповідає умові, що параметр кратності модуляції P_3 є кратним числу 3, $P_3 = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, тобто коли інтергармонік не виникає. Максимальне значення $THD_{lf \max}$ відповідає випадку $P_3 = 1.5 + 3k$, тобто у режимах з інтергармоніками.

Для визначення екстремума параметра B , знайдемо похідну виразу (5.83). Оскільки рівняння є трансцендентним, аналітично корені не розраховуються. Нижче наведено перші декілька значень коренів, що відповідають умові $P_3 > 3$:

- мінімуми функції B : $P_3 = 3.200 \rightarrow B = 6.020 \cdot 10^{-3}$; $P_3 = 6.085 \rightarrow B = 2.807 \cdot 10^{-3}$; $P_3 = 9.054 \rightarrow B = 1.840 \cdot 10^{-3}$;

- максимуми функції B : $P_3 = 4.112 \rightarrow B = 6.980 \cdot 10^{-3}$; $P_3 = 7.300 \rightarrow B = 3.877 \cdot 10^{-3}$; $P_3 = 10.363 \rightarrow B = 2.716 \cdot 10^{-3}$.

Залежність функції B для діапазону $P_3 = 3..50$ наведено на рис. 5.19.

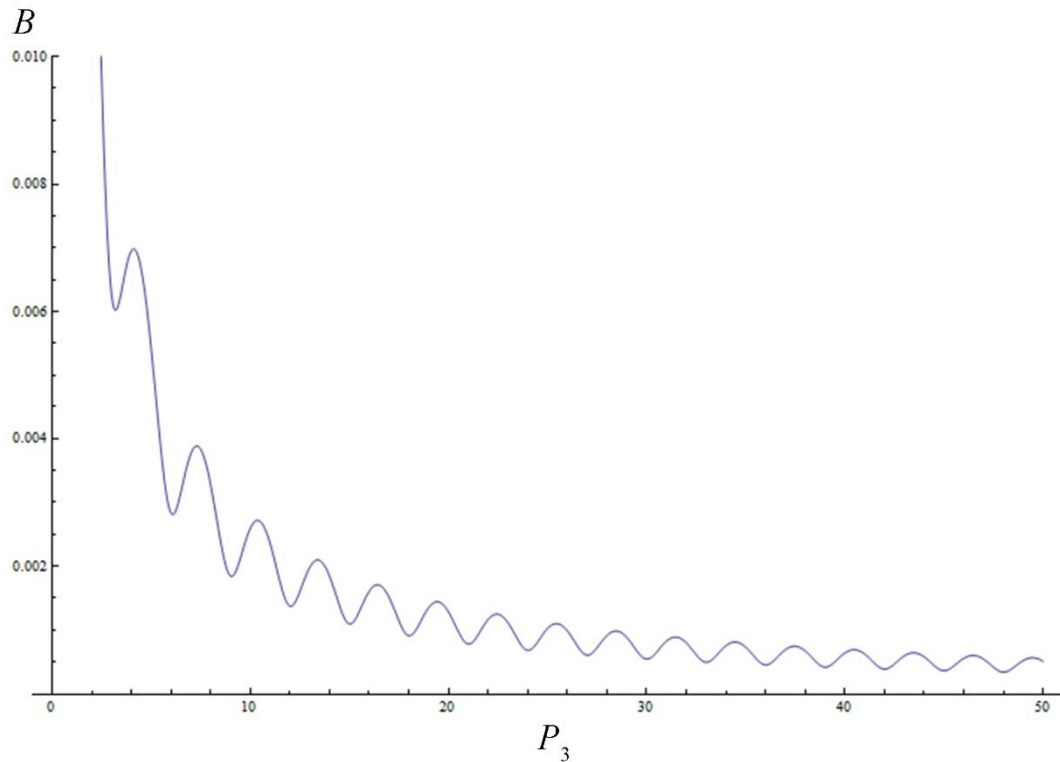
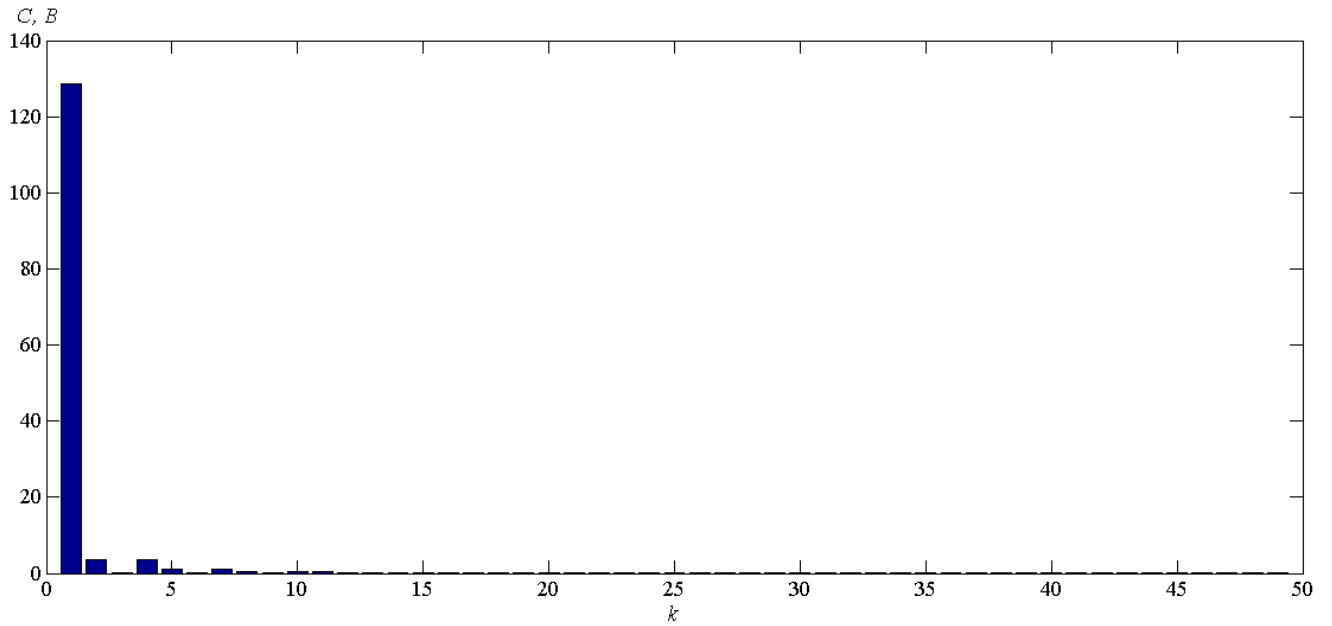


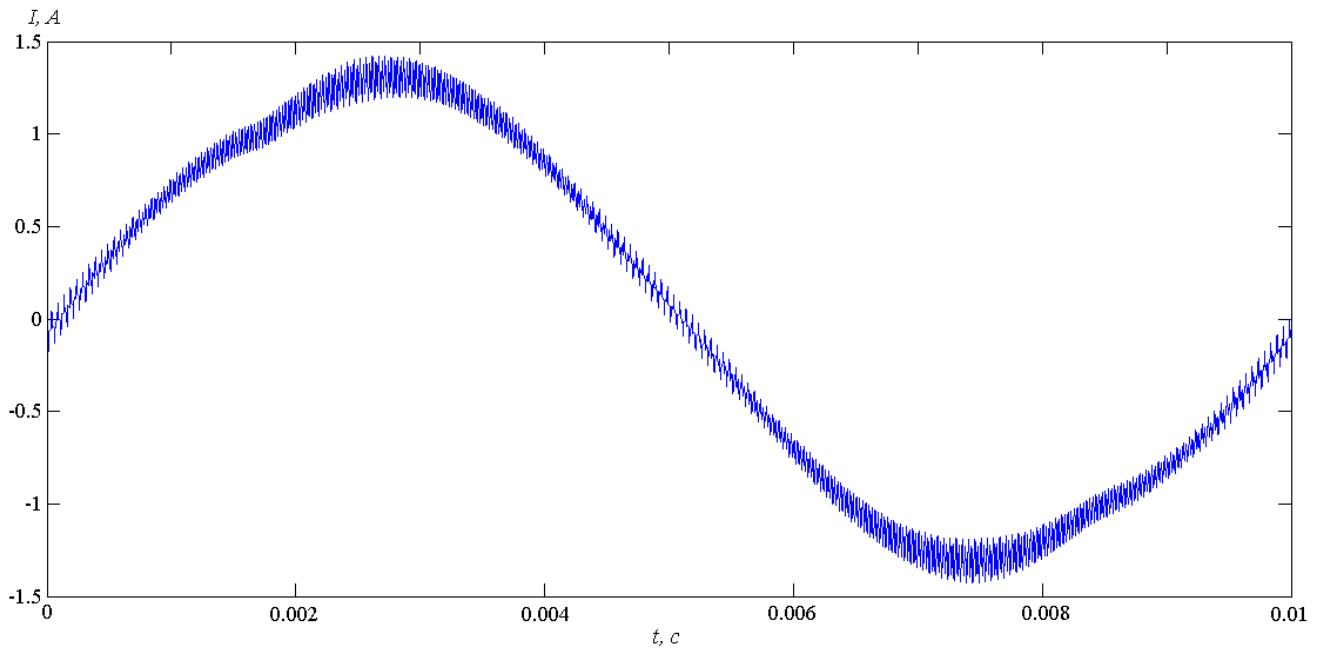
Рис. 5.19. Функціональна залежність параметра B від параметра кратності модуляції P_3

З аналізу рис. 5.19 можна зробити висновок, що коефіцієнт підмагнічування B дуже швидко спадає до нуля зі збільшенням кратності модуляції P_3 . Значення параметра B на порядок менше ніж THD_{lf} , що свідчить про невеликі значення інтергармонік, з частотою, меншою за частоту основної гармоніки. Тому ефект від намагнічування асинхронного двигуна інтергармоніками є незначним.

Перевіримо отримані значення на основі Simulink моделі, зображеної на рис. 5.14 з використанням синусоїдальної ШІМ. Перевірка параметра THD_{lf} здійснювалась при $\mu = 0.5$, $P = 200$ і значення параметра P_3 , $P_3 = 3$, що відповідає мінімальному THD_{lfmin} . На рис. 5.20, а побудовано спектр фазної напруги двигуна та на рис. 5.20, б – форму струму, що відповідають значенню THD_{lfmin} .



а)



б)

Рис. 5.20. Спектр напруги а) і струму фази б) для випадку $\mu = 0.5$, $P = 200$ $P_3 = 3$, що відповідають мінімальному THD_{lfmin}

На основі спектра напруги, рис. 5.20, а розраховано значення параметра $THD_{lf} = 0.046$, що близьке до теоретичного, розрахованого за формулою (5.81) $THD_{lf} = 0.047$.

Загалом отримані розрахункові співвідношення дають можливість оцінити значення коефіцієнта низькочастотних нелінійних спотворень THD_{lf} при довільних значеннях частоти носійної функції f_H і частоти обертання двигуна f_M , що дозволяє

оцінити мінімально можливі спотворення фазного струму двигуна з урахуванням низькочастотних спотворень. Показано, що при певних співвідношеннях параметра кратності модуляції P_3 , а саме $P_3 = 1.5 + 3k$, значення параметра THD_{lf} має локальні максимуми на що потрібно звернути увагу при використанні електропривода з урахуванням можливих негативних факторів, спричинених появою низькочастотних спотворень струму [213, 214].

5.4.6 Методика усунення інтергармонік напруги на виході трифазного інвертора

Усунення інтергармонік в фазних струмах двигуна, які виникають внаслідок некратності частоти обертання двигуна та частоти пульсації випрямленої напруги, що розглянуто в параграфі 5.4.5, можливе за умови модифікації закону модуляції фазних напруг.

Для опису модифікованого закону модуляції розглянемо спотворення, що вносяться накладанням пульсації випрямленої напруги u_{Π} на постійну складову напруги U з утворенням фазної напруги зі спотвореннями u_{ϕ}^* :

$$y_M(U + u_{\Pi}) = u_{\phi}^*, \quad (5.84)$$

де y_M – модулююча функція.

Спотворення що вносяться пульсацією:

$$y_M u_{\Pi} = u_{\phi}^* - u_{\phi}, \quad (5.85)$$

повинні бути компенсовані повністю або частково.

Їх компенсацію доцільно проводити вибірково, використовуючи значення спектра фазної напруги u_{ϕ}^* , приклад якої показано 5.15, б. Обравши гармоніки та інтергармоніки, які потрібно усунути, формується задавальна дія y_{M3} для модифікованого модульованого сигналу:

$$y_{M3} = - \sum_{k=1}^l (a_k \cos(kx_2) + b_k \sin(kx_2)), \quad (5.86)$$

де l – кількість гармонік та інтергармонік, що усувається, a_k , b_k – амплітуди косинусної і синусної складових гармоніки k .

Також до задавальної дії y_{M3} додається коригуюче значення амплітуди першої гармоніки, якщо її значення спотворилось у результаті накладання збурень.

Задавальна дія модифікованого модульованого сигналу, використовується для корекції координат переднього α_{Pi} і заднього α_{3i} фронтів імпульсу ШІМ з номером i на кути $\Delta\alpha_{Pi}$ і $\Delta\alpha_{3i}$, що розраховуються з інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{P}(i-1)}^{\alpha_{Pi}} y_{M3}(x_2) dx_2 &= \int_{\alpha_{Pi}-\Delta\alpha_{Pi}}^{\alpha_{Pi}} (U + u_{Pi}(x_2)) dx_2; \\ \int_{\alpha_{3i}}^{\frac{2\pi}{P}i} y_{M3}(x_2) dx_2 &= \int_{\alpha_{3i}}^{\alpha_{3i}+\Delta\alpha_{3i}} (U + u_{Pi}(x_2)) dx_2. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Відповідно до формули (5.86) ліва частина інтегральних рівнянь дорівнює:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{P}(i-1)}^{\alpha_{Pi}} y_{M3}(x_2) dx_2 &= \\ -\sum_{k=1}^l \frac{1}{k} (a_k (\sin(k\alpha_{Pi}) - \sin(k2\pi(i-1)/P)) - b_k (\cos(k\alpha_{Pi}) - \cos(k2\pi(i-1)/P))) &; \quad (5.88) \\ \int_{\alpha_{3i}}^{\frac{2\pi}{P}i} y_{M3}(x_2) dx_2 &= -\sum_{k=1}^l \frac{1}{k} (a_k (\sin(k2\pi i/P) - \sin(k\alpha_{3i})) - b_k (\cos(k2\pi i/P) - \cos(k\alpha_{3i}))). \end{aligned}$$

Підінтегральна функція правої частини рівняння визначається формою випрямленої напруги u_B :

$$u_B = U_m \cos(V(x_2 - \pi/6)), l\pi/(3V) \leq x_2 < (l+1)\pi/(3V), \quad (5.89)$$

яка після інтегрування згідно з виразом (5.87), $u_B = u_{Pi} + U$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{Pi}-\Delta\alpha_{Pi}}^{\alpha_{Pi}} u_B(x_2) dx_2 &= U_m (\sin(V(\alpha_{Pi} - \pi/6)) - \sin(V(\alpha_{Pi} - \Delta\alpha_{Pi} - \pi/6))) / V \approx \\ &\approx U_m (\cos(V(\alpha_{Pi} - \pi/6)) \Delta\alpha_{Pi}) / V; \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{3i}}^{\alpha_{3i}+\Delta\alpha_{3i}} u_B(x_2) dx_2 &= U_m (\sin(V(\alpha_{3i} + \Delta\alpha_{3i} - \pi/6)) - \sin(V(\alpha_{3i} - \pi/6))) / V \approx \\ &\approx U_m (\cos(V(\alpha_{3i} + \pi/6)) \Delta\alpha_{3i}) / V. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Наближення, використанні у формулах (5.90) і (5.91), дозволяють отримати результат з похибкою, що не перевищує значення $\delta < \Delta\alpha^2/2$.

Після підстановки виразів (5.88), (5.90), (5.91) у (5.87) та вирішення утворених рівнянь, отримаємо:

$$\Delta\alpha_{Pi} = -\frac{V}{U_m \cos(V(\alpha_{Pi} - \pi / 6))} \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} (a_k (\sin(k\alpha_{Pi}) - \sin(k2\pi(i-1) / P)) - b_k (\cos(k\alpha_{Pi}) - \cos(k2\pi(i-1) / P))); \quad (5.92)$$

$$\Delta\alpha_{3i} = -\frac{V}{U_m \cos(V(\alpha_{3i} + \pi / 6))} \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} (a_k (\sin(k\alpha_{Pi}) - \sin(k2\pi(i-1) / P)) - b_k (\cos(k\alpha_{Pi}) - \cos(k2\pi(i-1) / P))). \quad (5.93)$$

Розглянемо випадок придушення інтергармонік модульованої напруги з параметрами $P = 20$ та $P_3 = 5.25$, $\mu = 0.8$, спектр якої показано на рис. 5.21. Параметр V для цього випадку рівний чотирьом, $V = 4$. Загалом інтергармоніки з найбільшими значеннями мають номери, що є комбінаціями гармонік процесів, що мають найбільші значення. Як правило це перші ненульові гармоніки процесів, що утворюють інтергармоніки.

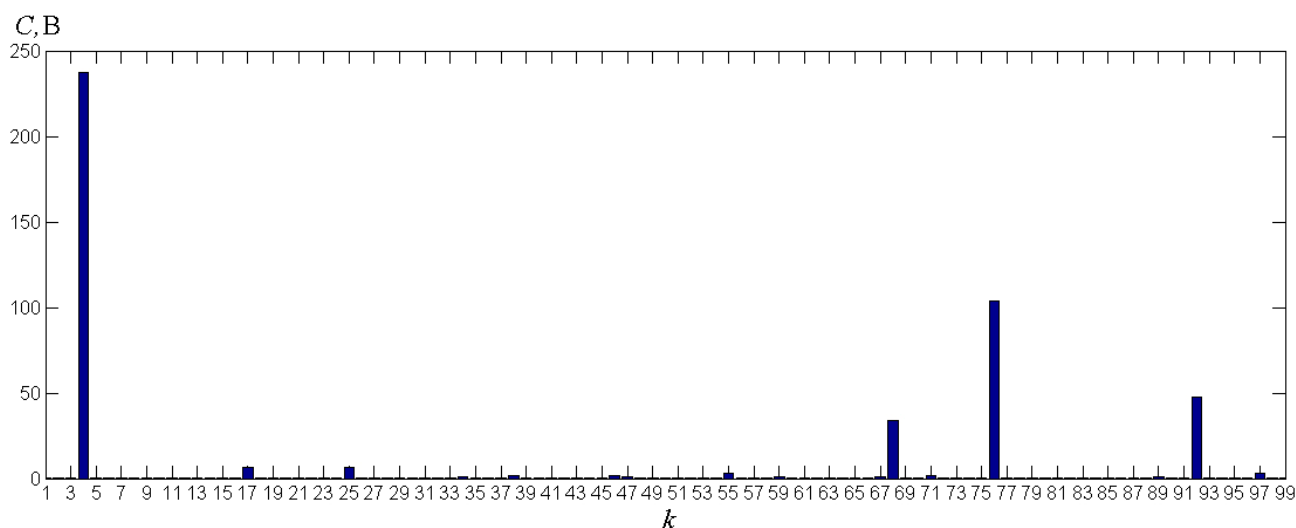


Рис. 5.21. Спектр модульованої напруги з інтергармоніками

З аналізу спектра, зображеного на рис 5.21, можна зробити висновок, що пульсація випрямленої напруги спричинила появу двох низькочастотних інтергармонік з номерами k_{int1} , k_{int2} , що утворились як комбінаційні гармоніки першої гармоніки модульованого сигналу з номером $V = 4$ та першої гармоніки випрямленої напруги з номером $V \cdot P_3 = 21$ з найменшим комбінаційним індексом $m = 1$: $k_{int1} = V \cdot P_3 - V = 17$, $k_{int2} = V \cdot P_3 + V = 25$, та зменшення амплітуди першої гармоніки на 4.7 %. Значення наступних інтергармонік з модуляційним індексом $m = 2$ з номерами $k_{int3} = V \cdot P_3 - 2V = 13$, $k_{int2} = V \cdot P_3 + V = 29$ є суттєво меншими, ніж інтергармонік з номерами k_{int1} , k_{int2} , тому вони не враховуються у задавальній дії u_{M3}

(5.86), що показана на рис. 5.22 разом із коригуючим модульованим сигналом $\Delta\alpha$ базового модульованого сигналу.

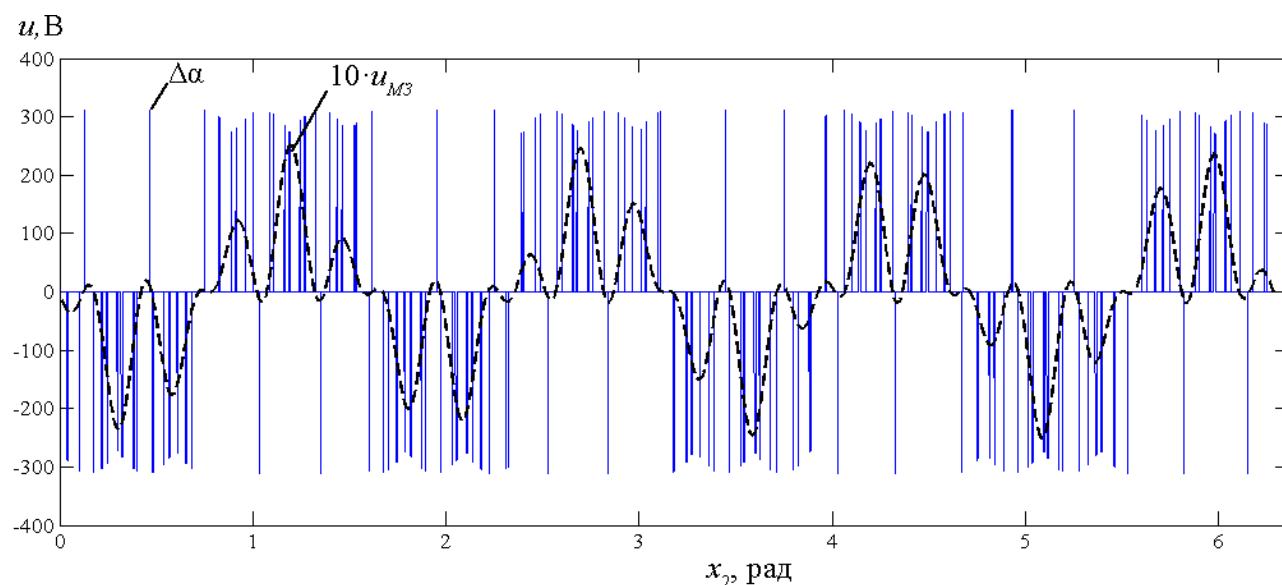


Рис. 5.22. Задавальна дія u_{M3} та коригуючий модульований сигнал $\Delta\alpha$ базового модульованого сигналу

Після додавання коригуючого модульованого сигналу $\Delta\alpha$ до базового, отриманого за законом ШІМ, отримано модифікований модульований сигнал, спектр якого зображено на рис. 5.23.

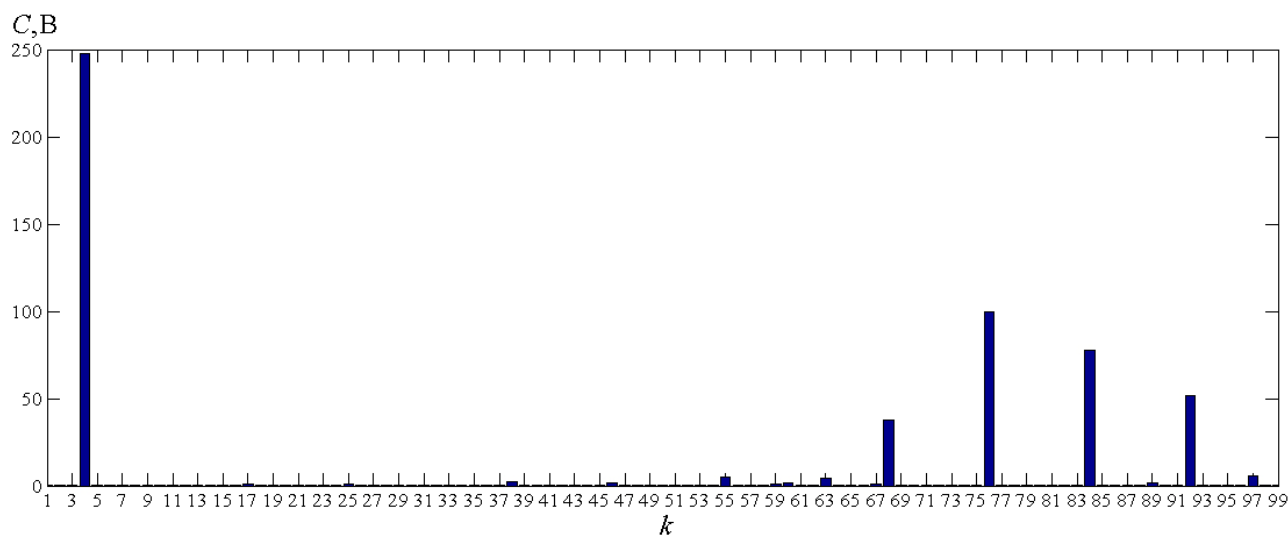


Рис. 5.23. Спектр модифікованого модульованого сигналу

З аналізу спектра, зображеного на рис. 5.23 можна зробити висновок, що амплітуда інтергармоніки з номером $k_{int1} = 17$ зменшилась в 9.8 разів, інтергармоніки $k_{int2} = 25$ – зменшилась в 5.7 разів, похибка формування амплітуди

першої гармоніки зменшилась з 4.7 % до 0.4 %. При цьому коефіцієнт інтергармонічних спотворень THD_{if} зменшився зі значення 0.046 до 0.029 тобто на 37 %.

Для можливості усунення інтергармонік в контурі системи керування у реальному масштабі часу пропонується наступна методика її роботи:

1. Формування модульованої напруги трифазного інвертора на основі методу ШІМ та запис позицій фронтів модуляції в таблицю.

2. Розрахунок значень першої гармоніки та інтергармонік з комбінаційним індексом $m = 1$ за формулами (5.73) і (5.74).

3. Якщо значення амплітуд інтергармонік з комбінаційним індексом $m = 1$ є меншим за порогове, закінчення розрахунку інтергармонік, в інакшому випадку збільшення значення комбінаційного індексу на одиницю і продовження розрахунку інтергармонік, доки їх значення не стане менше порогового.

4. Формування задавальної дії u_{M3} модифікованого модульованого сигналу за формулою (5.86).

5. Розрахунок коригуючого модульованого сигналу $\Delta\alpha$ за формулами (5.92) і (5.93) та модифікованого модульованого сигналу.

Пункти 2-5 методики потребують додаткових розрахунків у порівнянні зі звичайною методикою формування модульованого сигналу. Оцінимо їх трудомісткість:

- значення першої гармоніки у п.2 розраховується на основі компоненти $C_{(0)(1)(0)}$ за формулою (5.73), що потребує 3 операцій множення і ділення.

- розрахунок кожного значення інтергармоніки потребує 10 операцій множення і ділення;

- формування задавальної дії u_{M3} за формулою (5.86) потребує розрахунку $2Pl$ значень функцій тригонометричних функцій, де l – кількість інтергармонік для яких формується коригуючий модулюючий сигнал;

- розрахунок коригуючого модульованого сигналу $\Delta\alpha$ за формулами (5.92) і (5.93) потребує $10lP$ операцій множення і ділення,

тобто загалом $2+10l+12Pl$ операцій множення і ділення, які виконуються на V періодах мережі, тобто протягом десятків мілісекунд. З отриманої трудомісткості

методики можна зробити висновок, що алгоритм придушення інтергармонік, реалізований на її основі, може бути виконаний у реальному масштабі часу.

5.4.7. Методика розрахунку вхідного струму електропривода, спожитого від мережі, за струмами фаз двигуна

Забезпечення ефективної роботи системи електропривода пов'язане не тільки з контролем параметрів якості електроенергії, спожитих безпосередньо двигуном, а й формою струму, спожитого від мережі [215, 216]. Для цього доцільно розробити методику переходу від струму фаз двигуна до струму фаз мережі, що складається з декількох кроків.

На першому кроці розраховується спектр струму фаз двигуна $C_{k(i)}$ на основі спектра напруги фази, формули (5.64) і (5.74) з урахуванням передавальної характеристики фільтра, для L фільтра формула розрахунку має вид:

$$C_{2k-1(i)} = C_{2k-1} \frac{R}{j2\pi f_M (2k-1)L + R}, \quad (5.94)$$

де f_M – частота обертання двигуна, R – еквівалентне навантаження фази двигуна, L – еквівалентна індуктивність фази двигуна.

На другому кроці розраховують струми фаз двигуна i_A, i_B, i_C у часовій області на основі спектральної характеристики, отриманої на основі формули (5.94).

На третьому кроці знаходиться струм у ланці постійного струму i_{DC} як сума фаз струмів двигуна по модулю у просторі змінної x_2 , що відповідає частоті обертання двигуна:

$$i_{DC}(x_2) = |i_A(x_2)| + |i_B(x_2)| + |i_C(x_2)|. \quad (5.95)$$

На четвертому кроці струми фаз мережі i_{Ag}, i_{Bg}, i_{Cg} розраховуються як добуток струму ланки постійного струму i_{DC} у просторі змінної x_2 та відповідної віконної функції кожної фази мережі W_A, W_B, W_C , що задає інтервал провідності діодів кожної фази. При цьому віконні функції залежать від аргументу x_3 , $W_A = f(x_3)$, $W_B = f(x_3)$, $W_C = f(x_3)$:

$$\begin{aligned} i_{Ag}(x_2, x_3) &= W_A(x_3) i_{DC}(x_2); \\ i_{Bg}(x_2, x_3) &= W_B(x_3) i_{DC}(x_2); \\ i_{Cg}(x_2, x_3) &= W_C(x_3) i_{DC}(x_2). \end{aligned} \quad (5.96)$$

При використанні формули (5.96) для розрахунків вводиться зв'язок між змінними $x_3 = x_2 \cdot P_3 / m_{II}$, де $m_{II} = 6$ – кількість пульсацій випрямленої напруги на

період частоти мережі. На рис. 5.24 показано принцип переходу від фазних струмів двигуна до струмів фаз мережі: на рис. 5.24, а показано фазні струми двигуна i_A , i_B , i_C і струм ланки постійного струму i_{DC} , на рис. 5.24, б, в, г – струми фаз мережі i_{Ag} , i_{Bg} , i_{Cg} відповідно.

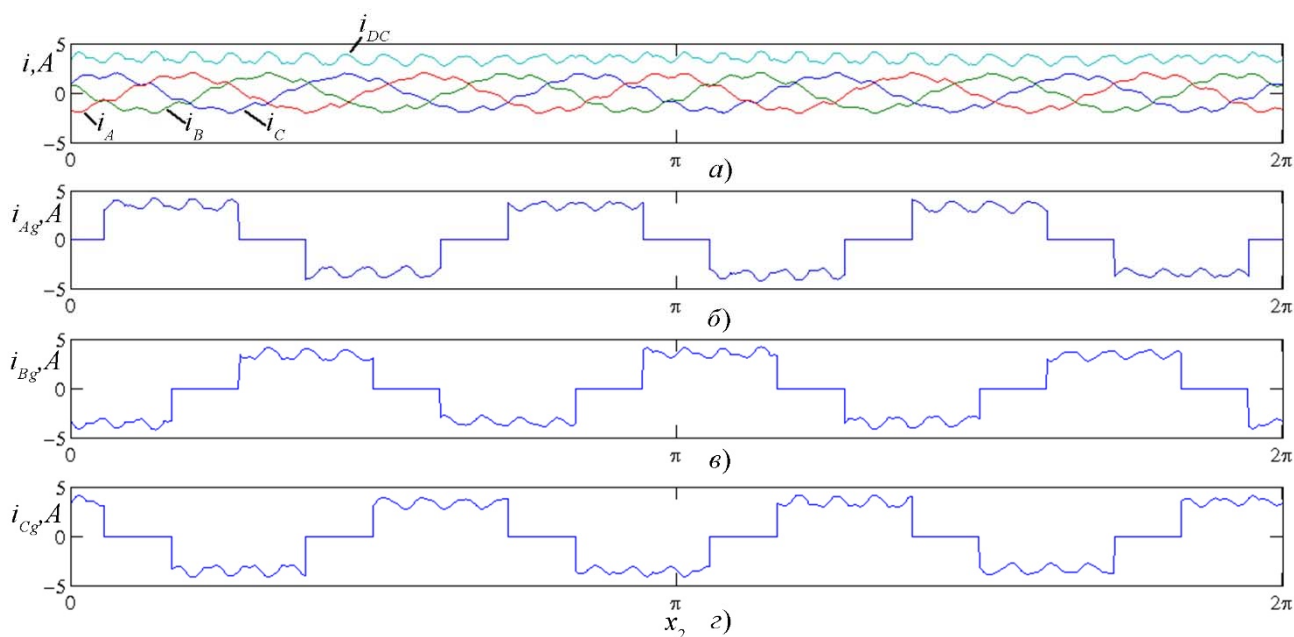


Рис. 5.24. Часові діаграми: а) струмів фаз двигуна та ланки постійного струму; б) струму фази А мережі; в) струму фази В мережі; г) струму фази С мережі

Отже, в асинхронних двигунах інтергармоніки виникають в основному через некрatність частоти обертання двигуна та частоти живлячої мережі та спотворюють форму фазних напруг двигуна та системи електроживлення. Використання узагальненого ряду Фур'є дозволяє ефективно виявляти та придушувати інтергармоніки, що значно зменшує спотворення струму, а також визначати форму струму мережі за струмом фаз двигуна.

Висновки до розділу 5

1. Показано, що узагальнений ряд Фур'є декількох змінних дозволяє у простий спосіб розраховувати спектр з інтергармонічними компонентами, утвореними внаслідок взаємодії довільної кількості процесів з наперед невизначеною частотою, що дозволяє значно підвищити ефективність розрахунку спектра модульованих сигналів.

2. Показано, що при спотворенні напруги мережі змінного струму збуреннями, створеними імпульсними навантаженнями, використання узагальненого ряду Фур'є суттєво пришвидшує перерахунок спектра при зміні параметрів збурень, при цьому складність алгоритму розрахунку спектра наближається до мінімально можливої кількості операцій $O(N)$, а розрахунок групи гармонік $O(N^{1/M})$, що набагато швидше у порівнянні з алгоритмом швидкого перетворення Фур'є і дає можливість використовувати його у системах керування у реальному масштабі часу.

3. Виявлено, що при аналізі одного з найпростіших випадків появи інтергармонічних складових у АС-DC перетворювачі, вплив інтергармонік має суттєвий вплив на підмагнічування трансформатора лише при невеликих кратностях модуляції і може досягати 20 % від вихідної потужності, при цьому підмагнічування трансформатора є меншим при непарному значенні чисельника параметра кратності модуляції.

4. Встановлено, що для забезпечення необхідних параметрів якості електроенергії – коефіцієнта низькочастотних нелінійних спотворень THD_{lf} та коефіцієнта підмагнічування B , при живленні регульованого електроприводу асинхронного двигуна доцільно контролювати рівень інтергармонічних спотворень, що утворюються при формуванні трифазної напруги живлення двигуна модуляцією випрямленої напруги, за умови неkratних частот обертання двигуна і мережі.

5. Проаналізовано значення коефіцієнта низькочастотних нелінійних спотворень THD_{lf} та коефіцієнта підмагнічування B та встановлено, що мінімальне значення THD_{lf} , $THD_{lf} = 0.024/\mu$ відповідає умові, коли параметр кратності модуляції є кратним числу 3, $P_3 = 3k$, $k \in N$, тобто коли інтергармонік не виникає, а максимальне $THD_{lf} = 0.069/\mu$ відповідає випадку $P_3 = 1.5 + 3k$, тобто у режимах з інтергармоніками.

6. Розроблено методику зменшення інтергармонічних складових у трифазному інверторі регульованого електропривода, обчислювальна складність якого дозволяє реалізувати його у контурі системи керування, що працює у

реальному масштабі часу та дозволяє знизити рівень інтергармонічних спотворень на порядок та зменшити коефіцієнт нелінійних інтергармонічних спотворень з 4.6 % до 2.9 %.

7. Для ефективного контролю параметрів якості електроенергії струмів фаз двигуна і вхідного струму мережі розроблено принцип розрахунку вхідного струму електропривода, спожитого від мережі, за струмами фаз двигуна, що дозволяє у простий спосіб зв'язати параметри якості електроенергії, спожитої від мережі та електроенергії, спожитої безпосередньо двигуном.

РОЗДІЛ 6. СИНТЕЗ СТРУКТУРИ МОДУЛЬНОГО ЗАРЯДНОГО ПРИБОРУ НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДУ ФУР'Є

6.1. Аналіз необхідної кількості комірок модульних перетворювачів за значенням параметрів якості електроенергії

6.1.1. Огляд топологій коректорів коефіцієнта потужності

Коректори коефіцієнта потужності (ККП) використовуються для примусового формування вхідного струму споживачів, що регулюються вимогами наведеними у стандарті [24]. Як правило ККП проектується як окрема ланка АС-DC перетворювача на основі підвищувального перетворювача.

Типова схема ККП на основі однофазного підвищувального перетворювача показана на рис. 6.1, а. В її основу покладено використання некерованого мостового випрямляча VDS1 і підключеного до його виводів на стороні постійного струму однотактного імпульсного регулятора підвищувального типу з послідовним дроселем L1 і паралельним ключем VT1 [217-219].

Принцип дії ККП базується на високочастотній комутації транзисторного ключа VT1, що забезпечує накопичення енергії в магнітному полі дроселя L1 і подальшу її передачу через роздільний діод VD1 до вихідного фільтру C і в навантаження. Алгоритм керування транзисторним ключем базується на основі інформації про миттєві значення еталонного сигналу (в якості якого використовується сигнал, пропорційний миттєвій напрузі живлячої мережі) і вхідного струму, який повторює форму еталонного сигналу. Регулювання споживаної від мережі потужності і, як наслідок, величини вхідних струмів і рівня вихідної напруги здійснюється за сигналами від'ємного зворотного зв'язку з виходу перетворювача. Величина вихідної напруги для даної схеми обирається з умови $U_{вих} > U_{BXmax}$. Для діючого значення напруги мережі $U_{BX} = 220$ В вихідна напруга таких схем зазвичай обирається в діапазоні $U_{вих} = 340...360$ В. Зазвичай для живлення електронної апаратури використовується на порядок менша напруга живлення, тому в цьому випадку на виході встановлюється понижувальний перетворювач, який як правило містить гальванічну розв'язку. Тому ККП з підвищувальним перетворювачем мають дволанкову структуру, показану на рис. 6.1, б.

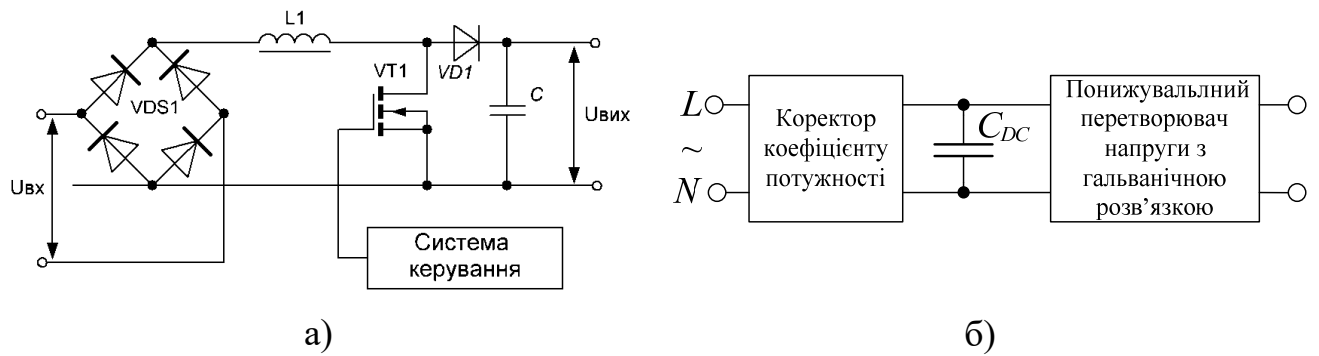


Рис. 6.1. Базова топологія ККП на основі підвищувального перетворювача а) та структура системи електроживлення б) на основі даного ККП

Для корекції коефіцієнта потужності ККП працює у режимі неперервного протікання вхідного струму. У цьому випадку для формування вхідного струму необхідно використовувати два зворотні зв'язки – по вхідному струму та напрузі на навантаженні [220], рис. 6.2, а, тому система керування ККП є складною у реалізації. Використання модульних перетворювачів, що працюють у граничному режимі протікання струму дозволяє спростити контур керування до структури, зображеної на рис. 6.2, б, забезпечити вмикання транзистора комірки при нульовому струмі та рівномірно розподілити потужність між комірками, тим самим зменшивши статичні втрати. У цьому випадку контур керування містить лише один зворотний зв'язок за вихідною напругою [221-223].

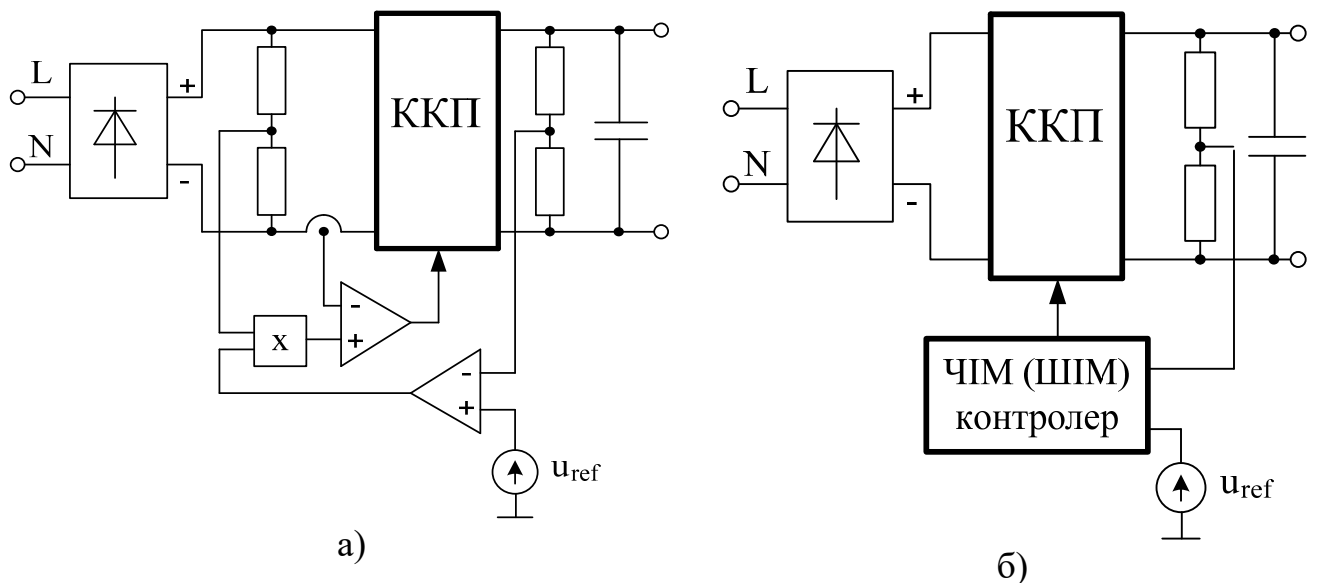


Рис. 6.2. Функціональна схема системи керування ККП: а) з неперервним режимом протікання струму дроселя; б) з граничним режимом

Сигнали керування транзисторами комірок у модульному перетворювачі зміщені на певний кут, що дає змогу сформувати неперервний струм мережі як показано на рис. 6.3 на прикладі двох комірок.

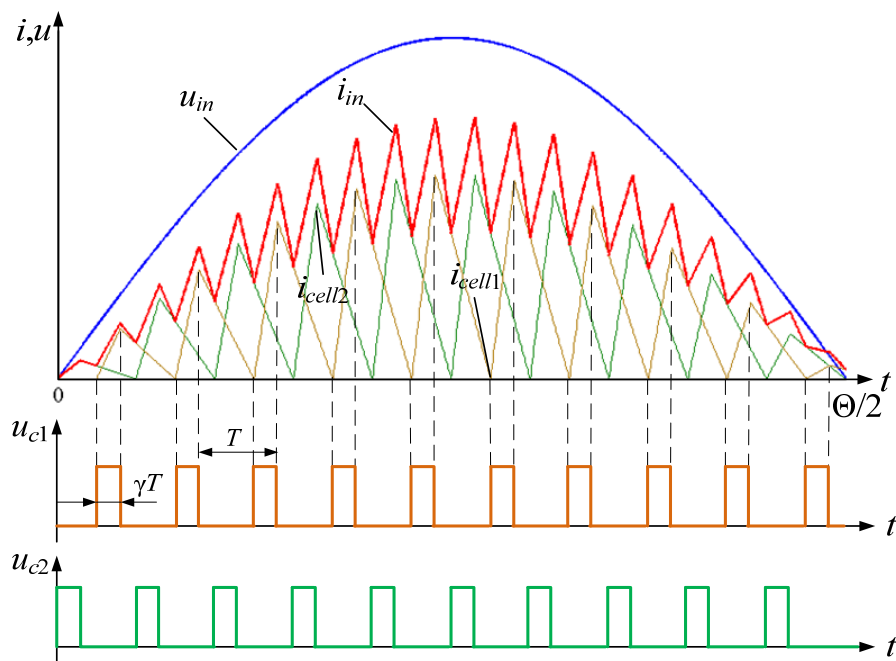


Рис. 6.3. Принцип формування неперервного струму мережі, де u_{c1} , u_{c2} – сигнали керування транзисторами комірок, i_{cell1} , i_{cell2} – входні струми комірок, u_{in} , i_{in} , Θ – напруга, струм і період мережі, γ , T – коефіцієнт заповнення і період роботи комірки

Як показано на рис. 6.3, сигнали керування зсунуті на половину періоду носійної функції, що дає можливість при граничному струмі кожної комірки сформувати неперервний сумарний струм, тому такий принцип корекції коефіцієнта потужності широко використовується на практиці [224-227].

ККП, окрім підвищувального перетворювача, також можуть проектуватись на основі інших перетворювачів напруги – понижувального, інвертувального (зворотного), SEPIC, Cuk [228]. При цьому вибір конкретної топології не є однозначним. Для ефективної реалізації ККП до обраної топології висувається ряд обов'язкових та додаткових вимог, серед яких можна виділити такі:

- 1) індуктивний елемент на вході, який формує безперервне протікання струму мережі;

- 2) вихід на постійному струмі;
- 3) можливість плавного пуску і плавного регулювання вхідного струму;
- 4) можливість інтеграції у його структуру трансформатора;
- 5) постійна частота комутації.

Для формування неперервного вхідного струму є обов'язковою перша умова, для живлення електронної апаратури обов'язковою умовою є друга. Три останніх – є додатковими. При цьому слід зазначити, що остання вимога щодо постійної частоти комутації дозволяє використовувати звичайний ШІМ контролер у ККП замість більш складного ЧІМ контролера. Виконання перерахованих умов для найпоширеніших топологій перетворювачів показано у табл. 6.1.

Таблиця 6.1. Виконання умов для найпоширеніших топологій перетворювачів

Перетворювач	Вимоги				
	1	2	3	4	5
Понижувальний	-	+	+	+/-	-
Підвищувальний	+	+	-	-	-
Інвертувальний	-	+	+	+	-
SEPIC	+	+	+	+	+
Cuk	+	+	+	+/-	+

З аналізу виконання умов можна зробити висновок, що як коректор коефіцієнта потужності доцільно використовувати перетворювач топології SEPIC, який через свої переваги найчастіше використовується на практиці [220, 229], тому у подальшому розглядається ця топологія.

При проектуванні модульних ККП важливим є вибір кількості комірок для забезпечення необхідних значень параметрів якості електроенергії у заданому діапазоні зміни параметрів. Особливо це стосується випадків, коли вихідна напруга та потужність перетворювача змінюється в широких межах, зокрема в зарядних пристроях акумуляторів [230-232]. Для усунення необхідності у багаторазовому моделюванні режимів роботи таких перетворювачів у всьому діапазоні вхідних параметрів, доцільно вивести аналітичні формули на основі рядів Фур'є декількох

змінних, на основі яких і визначати параметри якості електроенергії для різної кількості комірок.

У рамках проекту «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People» (Дослідження і розробка електричних, інформаційних технологій та технологій матеріалів для низькошвидкісних реабілітаційних транспортних засобів для людей з обмеженими можливостями») [233] ряд Фур'є двох змінних використано для розрахунку кількості комірок зарядного пристрою на основі перетворювача SEPIC, що забезпечує необхідне значення коефіцієнта потужності χ та коефіцієнта нелінійних спотворень THD при заряджанні двох гальванічно розв'язаних батарей від мережі $U_{in} = 230 \text{ В} \pm 15 \%$ струмом $I_{cc} = 8 \text{ А}$, напруга батарей змінюється в діапазоні $U_{out} = 17.5..29.4 \text{ В}$. Батарея складається з 28 однотипних Li-ion комірок типу INR18650 MJ1 [234] ємністю 3.5 А·год, які з'єднано в послідовно в ланцюжок по 7 елементів, кожен елемент складається з 4 паралельно з'єднаних комірок.

6.1.2. Математична модель процесів у перетворювачі SEPIC

Для аналізу режимів роботи модульного перетворювача розглянемо найпростіший перетворювач, що складається з двох комірок з топологією SEPIC, кожна комірка якого працює в граничному режимі протікання струму (ГРП), рис. 6.3. Вхідний струм i_{in} є сумою струмів комірок i_{cell1} і i_{cell2} , сигнали керування транзисторами комірок зсунуті на половину періода $T/2$. Робота перетворювача в режимі ГРП дає можливість формувати синусоїдальний неперервний струм з постійним періодом T та тривалістю імпульсу γT [235], де γ – коефіцієнт заповнення імпульсів. Однак на практиці, через складність задавання ГРП, найчастіше використовують переривчастий режим з незначною тривалістю нульової паузи струму $t_0 = \gamma_z T$, де γ_z – відносна тривалість нульової паузи струму, оскільки перехід у режим неперервного протікання струму суттєво спотворює форму вхідного струму і тому неприйнятний для використовуваного алгоритму керування [236]. Для аналізу параметрів якості електроенергії на основі комірки перетворювача SEPIC, розглянемо його принципову схему, зображену на рис. 6.4, а, та проаналізуємо її роботу на інтервалах сталості структури на основі таких умов:

- конденсатори C_i і C_o мають достатню ємність, тому пульсація напруги на них при аналізі не враховується;

- період ШІМ T значно менший періода напруги мережі Θ , $T \ll \Theta$, тому миттєве значення вхідної напруги u_{in} протягом періода ШІМ з номером k , T_k вважається постійним $u_{in(k)} = U_{in} = \text{const}$;

- елементи комірки SEPIC є лінійними.

У загальному випадку перетворювач має три інтервали сталості структури: інтервал наростання вхідного струму, зображений на рис. 6.4, б, інтервал спадання вхідного струму, рис. 6.4, в та інтервал нульової паузи струму, рис. 6.4, г.

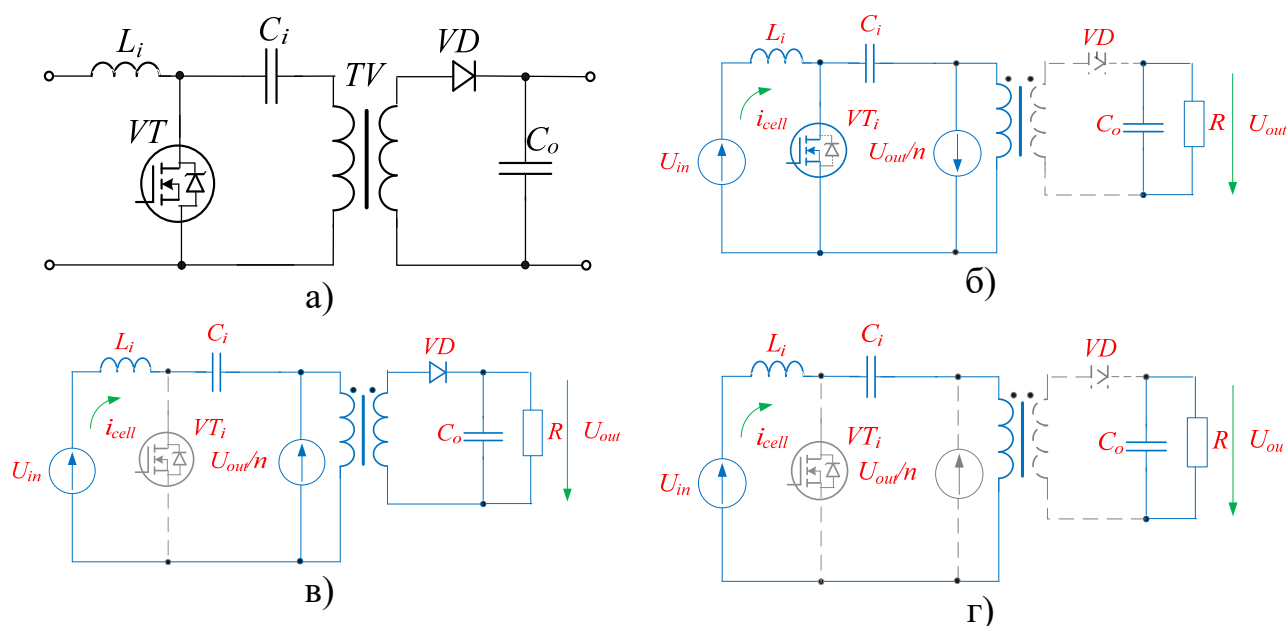


Рис. 6.4. Принципова схема комірки SEPIC а), та її схеми заміщення на трьох інтервалах: б) інтервал наростання вхідного струму; в) інтервал спадання вхідного струму; г) інтервал нульової паузи

На інтервалі наростання вхідного струму транзистор VT_i ввімкнено, вхідний струм комірки i_{cell} зростає з нульового до значення I_{cell_max} за законом:

$$i_{cell}(t) = \frac{U_{in}}{L_i} t, 0 < t \leq \gamma T, \quad (6.1)$$

де L_i – вхідна індуктивність, U_{in} – вхідна напруга.

На інтервалі спадання вхідного струму, струм з максимального значення I_{cell_max} знову спадає до нуля під дією вихідної напруги U_{out} , перерахованої до первинної обмотки трансформатора TV з коефіцієнтом трансформації n :

$$i_{cell}(t) = I_{cell_max} - \frac{U_{out}}{nL_i}(t - \gamma T), \gamma T < t \leq T - t_0, \quad (6.2)$$

де U_{out} – вихідна напруга, t_0 – тривалість інтервалу нульової паузи вхідного струму.

На третьому інтервалі, вхідний струм вважається рівним нулю, $i_{cell} = 0$. Наявність цього інтервалу погіршує форму вхідного струму, тому його тривалість потрібно мінімізувати. Розглянемо залежність коефіцієнта потужності χ та коефіцієнта нелінійних спотворень THD від тривалості нульової паузи та кількості комірок N на основі узагальненого ряду Фур'є.

6.1.3. Розрахунок спектра струму модульних перетворювачів на основі узагальненого ряду Фур'є

Для опису спектра струму комірки достатньо двох змінних x_1 та x_2 , що є аргументами носійної $y_H(x_1)$ та модулюючої $y_M(x_2)$ функцій.

У режимі ГРП перетворювач SEPIC має два інтервали роботи: інтервал наростання струму на проміжку $x_1 \in [0, 2\pi \cdot \gamma)$ та інтервал спадання струму на проміжку $x_1 \in [2\pi \cdot \gamma, 2\pi)$.

На першому інтервалі для заданого аргумента x_2 модулюючої функції y_M вхідний струм комірки i_{cell} в початковий момент має нульове значення, $i_{cell}(0) = 0$, лінійно зростає і наприкінці інтервалу досягає значення $I_{cell_max} = A \sin(x_2)$, де константа A – амплітуда вхідного струму комірку у момент $x_2 = \pi/2$, формула (6.1):

$$A = \frac{U_{in_max}}{L_i} \gamma T, \quad (6.3)$$

де U_{in_max} – амплітудне значення напруги мережі.

На другому інтервалі, початкове значення струму дорівнює I_{cell_max} і лінійно спадає до нуля в момент $x_1 = 2\pi$, $i_{cell}(2\pi) = 0$. Зважаючи на це, струм комірки i_{cell} на періоді носійної функції можна описати співвідношеннями:

$$i_{cell}(x_1) = \begin{cases} \frac{A \sin(x_2) x_1}{2\pi \gamma}, & 0 \leq x_1 < 2\pi \gamma; \\ \frac{A \sin(x_2) (2\pi - x_1)}{2\pi (1 - \gamma)}, & 2\pi \gamma \leq x_1 < 2\pi. \end{cases} \quad (6.4)$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ узагальненого ряду Фур'є відповідно до формули (6.4) і (2.4) розраховуються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\pi \sin(x_2) \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \right. \\
 & \left. \frac{1}{2\pi(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \frac{1}{(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \\
 & + \frac{A}{2\pi^2} \int_\pi^{2\pi} \sin(x_2) \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\pi(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} x e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \frac{1}{(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Після зміни у другому доданку виразу (6.5) меж інтегрування на $[0, \pi]$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{A}{2\pi^2} (1 - (-1)^{m_2}) \int_0^\pi \sin(x_2) e^{jm_2 x_2} \times \\
 & \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{jm_1 x} dx_1 - \frac{1}{2\pi(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} (x_1 - 2\pi) e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) dx_2.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

З аналізу формули (6.6) можна зробити висновок, що для парних m_2 спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ дорівнюють нулю, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, а непарні розраховуються за формулою:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1)(2m_2-1)} = & \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} \times \\
 & \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{jm_1 x_1} dx_1 - \frac{1}{2\pi(1-\gamma)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi} (x_1 - 2\pi) e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) dx_2.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(2m_2-1)}$, розраховані за формулою (6.7) мають лише три варіанти ненульових значень:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1)(1)} = & j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2}; \\
 C_{(m_1)(-1)} = & -j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2}; C_{(0)(1)} = \frac{jA}{2}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Згідно з формулою (6.8) спектр вхідного струму комірки i_{cell} розраховується таким чином:

$$\begin{aligned}
C_1 &= j \frac{A}{2}; \\
C_{2k-1} &= 0, 2k-1 \neq m_1 P + 1, 2k-1 \neq m_1 P - 1; \\
C_{m_1 P + 1} &= j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2}; \\
C_{m_1 P - 1} &= -j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)\Sigma}$ струму модульного перетворювача з N комірок, є сумою спектральних компонент кожної комірки, зсунутих на кут $e^{j2\pi m_1/N}$.

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(1)\Sigma} &= j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{j l 2\pi m_1}{N}}; \\
C_{(m_1)(-1)\Sigma} &= -j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{j l 2\pi m_1}{N}}; \\
C_{(0)(1)} &= \frac{jNA}{2}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Тому тільки спектральні компоненти з номерами $m_1 N$ мають ненульові значення:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1 N)(1)\Sigma} &= j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 N \pi})N}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma(m_1 N)^2}; \\
C_{(m_1 N)(-1)\Sigma} &= -j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 N \pi})N}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma(m_1 N)^2}; \\
C_{(0)(1)} &= \frac{jNA}{2}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Зважаючи на зменшення кількості ненульових значень спектральних компонент у сумарному струмі, його форма має менші спотворення:

$$\begin{aligned}
C_1 &= j \frac{NA}{2}; \\
C_{2k-1} &= 0, 2k-1 \neq m_1 NP + 1, 2k-1 \neq m_1 NP - 1; \\
C_{m_1 NP + 1} &= j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 N \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2 N}; \\
C_{m_1 NP - 1} &= -j \frac{A(1 - e^{2j\gamma m_1 N \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma m_1^2 N}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

В якості прикладу, виведені співвідношення використано для розрахунку струму комірок двокоміркового перетворювача із фазовим зсувом π та $\gamma = 0.3$, що показаний на рис. 6.5.

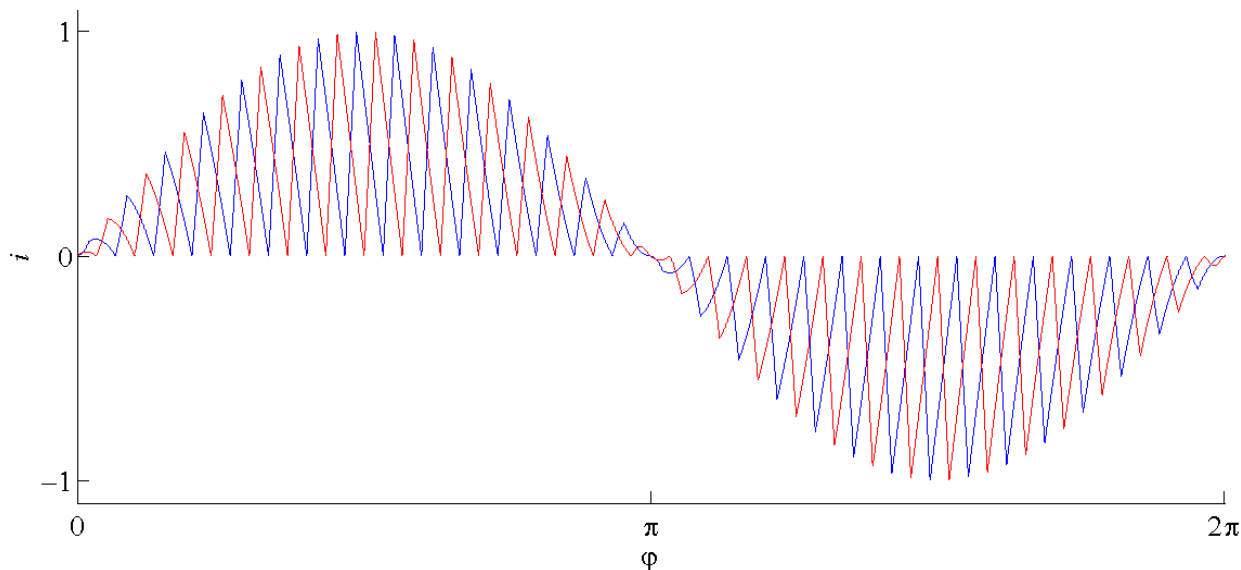


Рис.6.5. Струм комірок двокоміркового перетворювача в режимі ГРП

У переривчастому режимі (ПРП) з відносною тривалістю нульової паузи γ_z струм комірки i_{cell} визначається співвідношенням:

$$i_{cell}(x_1) = \begin{cases} \frac{A \sin(x_2) x_1}{2\pi\gamma}, & 0 \leq x_1 < 2\pi\gamma; \\ \frac{A \sin(x_2)(2\pi(1-\gamma_z) - x_1)}{2\pi(1-\gamma-\gamma_z)}, & 2\pi\gamma \leq x_1 < 2\pi(1-\gamma_z); \\ 0, & 2\pi(1-\gamma_z) \leq x_1 < 2\pi. \end{cases} \quad (6.13)$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ узагальненого ряду Фур'є струму, що змінюється за законом, заданим формулою (6.13), розраховуються за формулою:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\pi \sin(x_2) \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \frac{1}{2\pi(1-\gamma-\gamma_z)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi(1-\gamma_z)} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \right. \\ \left. \frac{1}{(1-\gamma-\gamma_z)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi(1-\gamma_z)} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \frac{A}{2\pi^2} \int_\pi^{2\pi} \sin(x_2) \left(\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi\gamma} x_1 e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi(1-\gamma-\gamma_z)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi(1-\gamma_z)} x e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \frac{1}{(1-\gamma-\gamma_z)} \int_{2\pi\gamma}^{2\pi(1-\gamma_z)} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2. \quad (6.14)$$

Проінтегрувавши вираз у формулі (6.14) та виділивши ненульові компоненти, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1)(1)} &= \frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 \pi} (\gamma_z - 1) - e^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma_z + \gamma - 1));}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma m_1^2}; \\
 C_{(m_1)(-1)} &= -\frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 \pi} (\gamma_z - 1) - e^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma_z + \gamma - 1));}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma m_1^2}; \\
 C_{(0)(1)} &= \frac{jA}{2} (1 - \gamma_z).
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Спектр струму комірки, отриманий на основі формули (6.15):

$$\begin{aligned}
 C_1 &= j \frac{A}{2} (1 - \gamma_z); \\
 C_{2k-1} &= 0, 2k-1 \neq m_1 P + 1, 2k-1 \neq m_1 P - 1; \\
 C_{m_1 P+1} &= \frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 \pi} (\gamma_z - 1) - e^{2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma_z + \gamma - 1));}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma m_1^2}; \\
 C_{m_1 P-1} &= -\frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 \pi} (\gamma_z - 1) - e^{2j\gamma_z m_1 \pi} (\gamma_z + \gamma - 1))}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma m_1^2}.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)\Sigma}$ струму модульного перетворювача з N комірками розраховуються за формулою:

$$\begin{aligned}
 C_{(m_1 N)(1)} &= \frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 N \pi} (\gamma_z - 1) - e^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma_z + \gamma - 1))N;}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma (m_1 N)^2}; \\
 C_{(m_1 N)(-1)} &= -\frac{jAe^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 N \pi} (\gamma_z - 1) - e^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma_z + \gamma - 1));}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma (m_1 N)^2}; \\
 C_{(0)(1)} &= \frac{jAN}{2} (1 - \gamma_z).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Спектр сумарного струму комірок:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= j \frac{AN}{2} (1 - \gamma_z); \\
 C_{2k-1} &= 0, 2k-1 \neq m_1 P + 1, 2k-1 \neq m_1 P - 1; \\
 C_{m_1 NP+1} &= \frac{jANe^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 N \pi} (\gamma_z - 1) - e^{2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma_z + \gamma - 1));}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) (\gamma m_1) N^2}; \\
 C_{m_1 NP-1} &= -\frac{jANe^{-2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma + e^{2j(\gamma+\gamma_z)m_1 N \pi} (\gamma_z - 1) - e^{2j\gamma_z m_1 N \pi} (\gamma_z + \gamma - 1))}{4\pi^2 (\gamma + \gamma_z - 1) \gamma (m_1 N)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Форму струму модульного двокоміркового перетворювача для $\gamma = 0.4$ і $\gamma_z = 0.4$ показано на рис. 6.6.

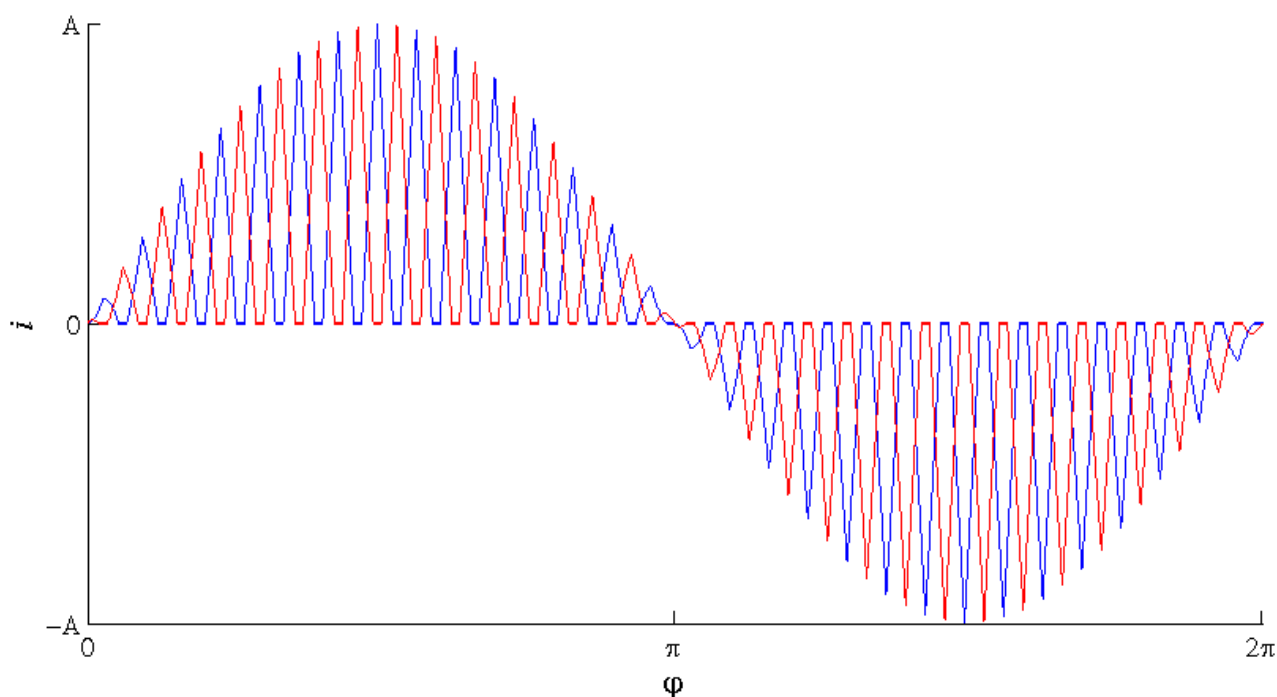


Рис. 6.6. Струм комірок модульного перетворювача в режим ПРП

Після виведення формул розрахунку спектра модульного перетворювача можливо отримати аналітичні співвідношення коефіцієнта потужності χ та коефіцієнта нелінійних спотворень THD для заданої кількості комірок N .

6.1.4. Розрахунок параметрів якості електроенергії

Розглянемо принцип розрахунку коефіцієнта потужності χ та коефіцієнта нелінійних спотворень THD у режимі ГРП для заданої кількості комірок N . Діюче значення струму $I_{in_RMS(N)}$ розраховується за формулою:

$$I_{in_RMS(N)} = \sqrt{\frac{(AN)^2}{4} + 2 \sum_{m_1=1}^{\infty} \left| \frac{AN(1 - e^{2j\gamma m_1 N \pi})}{4\pi^2(\gamma - 1)\gamma(m_1 N)^2} \right|^2} =$$

$$= \frac{AN}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)((\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor) - 1)}{(\gamma - 1)\gamma N} \right)^2}. \quad (6.19)$$

Параметри χ_N і THD_N модульного перетворювача розраховуються на основі формули (6.19):

$$\chi_N = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)((\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor) - 1)}{(\gamma - 1)\gamma N} \right)^2} \right)^{-1}; \quad (6.20)$$

$$THD_N = \frac{\left(\frac{(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)(1 - (\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor))}{(1 - \gamma)\gamma N} \right)}{\sqrt{3 + \left(\frac{(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)((\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor) - 1)}{(\gamma - 1)\gamma N} \right)^2}}. \quad (6.21)$$

Для режиму з нульовою паузою γ_z діюче значення струму розраховується за формулою:

$$I_{in_RMS(N)p} = \sqrt{\frac{(AN)^2}{4}(1 - \gamma_z)^2 + z}, \quad (6.22)$$

де

$$\begin{aligned} z = & 2 \left(\frac{1}{4\pi^2(\gamma + \gamma_z - 1)\gamma N} \right)^2 \frac{\pi^4}{90N^2} \left((\gamma^2 + (\gamma_z - 1)^2 + (\gamma_z + \gamma - 1)^2) + \right. \\ & + 2\gamma(\gamma_z - 1) \left(1 - 30((\gamma_z + \gamma)N - \lfloor (\gamma_z + \gamma)N \rfloor)^2 + \right. \\ & + 60((\gamma_z + \gamma)N - \lfloor (\gamma_z + \gamma)N \rfloor)^3 - 30((\gamma_z + \gamma)N - \lfloor (\gamma_z + \gamma)N \rfloor)^4) - \\ & - 2(\gamma_z - 1)(\gamma_z + \gamma - 1) \left(1 - 30(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)^2 + 60(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)^3 - 30(\gamma N - \lfloor \gamma N \rfloor)^4) - \\ & \left. - 2\gamma(\gamma_z + \gamma - 1) \left(1 - 30(\gamma_z N - \lfloor \gamma_z N \rfloor)^2 + 60(\gamma_z N - \lfloor \gamma_z N \rfloor)^3 - 30(\gamma_z N - \lfloor \gamma_z N \rfloor)^4 \right) \right). \end{aligned}$$

Параметри χ_{Np} і THD_{Np} модульного перетворювача для режиму з нульовою паузою γ_z розраховуються за формулою:

$$\chi_{Np} = \frac{0.5A \cdot N(1 - \gamma_z)}{\sqrt{0.5A \cdot N(1 - \gamma_z) + z}}; \quad (6.23)$$

$$THD_{Np} = \frac{z}{0.5A \cdot N(1 - \gamma_z)}. \quad (6.24)$$

Функціональна залежність параметрів χ_N і THD_N від коефіцієнта заповнення імпульсів γ для $N = 1, 2, 3, 4$ комірок в режимі ГРП показана на рис. 6.7, а і б відповідно.

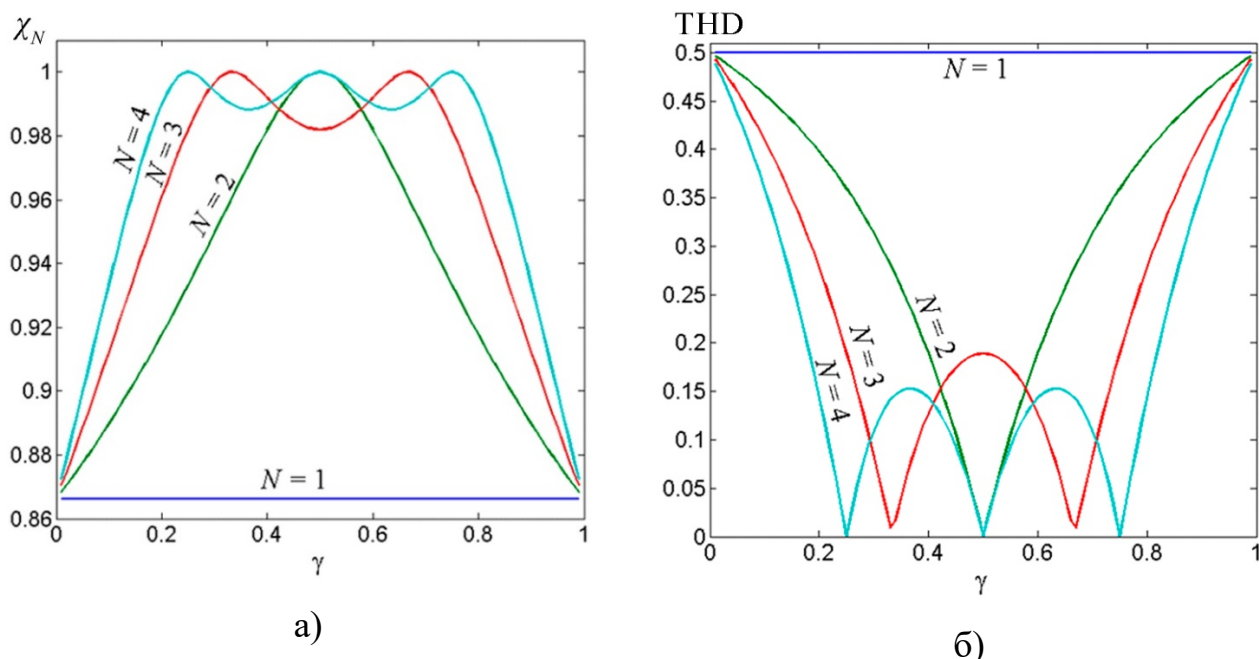


Рис. 6.7. Функціональна залежність параметрів χ_N а) і THD_N б) від коефіцієнта заповнення імпульсів γ і кількості комірок N

З аналізу даних, наведених на рис. 6.7, можна зробити висновок, що збільшення кількості комірок N значно покращує значення параметрів χ_N і THD_N та розширює діапазон γ , де вони мають задовільні значення, $\gamma \in [1/N; 1-1/N]$. Однак через значне перевантаження за напругою ключових елементів перетворювача при $\gamma > 0.5$, робочий діапазон роботи перетворювача обмежується значеннями $\gamma \in [1/N; 0.5]$.

Функціональна залежність χ_{Np} і THD_{Np} у режимі ПРП є більш складною через наявність додаткового параметра – відносної тривалості нульової паузи γ_z . Вказана залежність для параметра χ_{Np} наведена на рис. 6.8, а, б, в, для параметра THD_{Np} – на рис. 6.9, а, б, в, що відповідають кількості комірок $N = 2, N = 3, N = 4$ відповідно.

Залежність параметрів якості електроенергії χ і THD від параметрів γ та γ_z свідчить про погіршення значень χ і THD зі збільшенням відносної тривалості нульової паузи струму γ_z , однак зі збільшенням кількості комірок N ця негативна залежність проявляється не так суттєво.

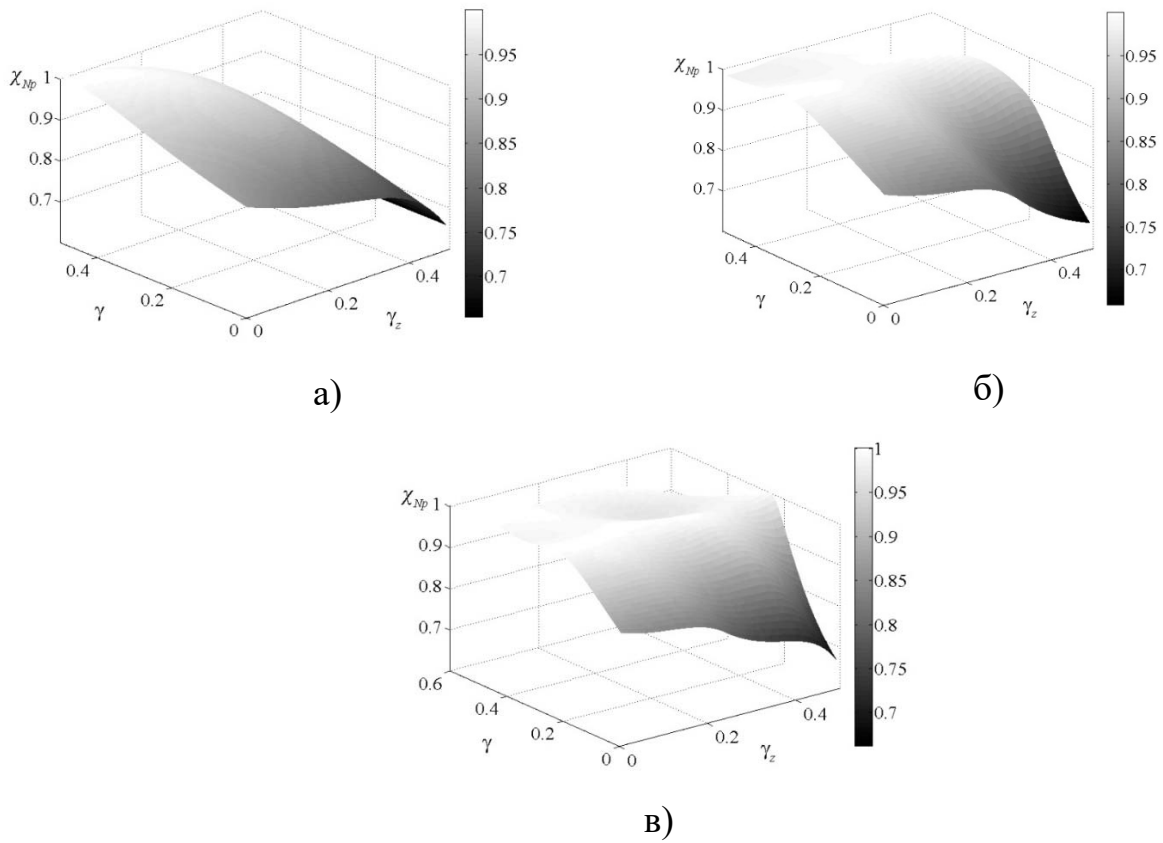


Рис.6.8. Функціональна залежність коефіцієнта потужності χ_{Np} від параметрів γ та γ_z для різної кількості комірок: а) $N = 2$, б) $N = 3$, в) $N = 4$

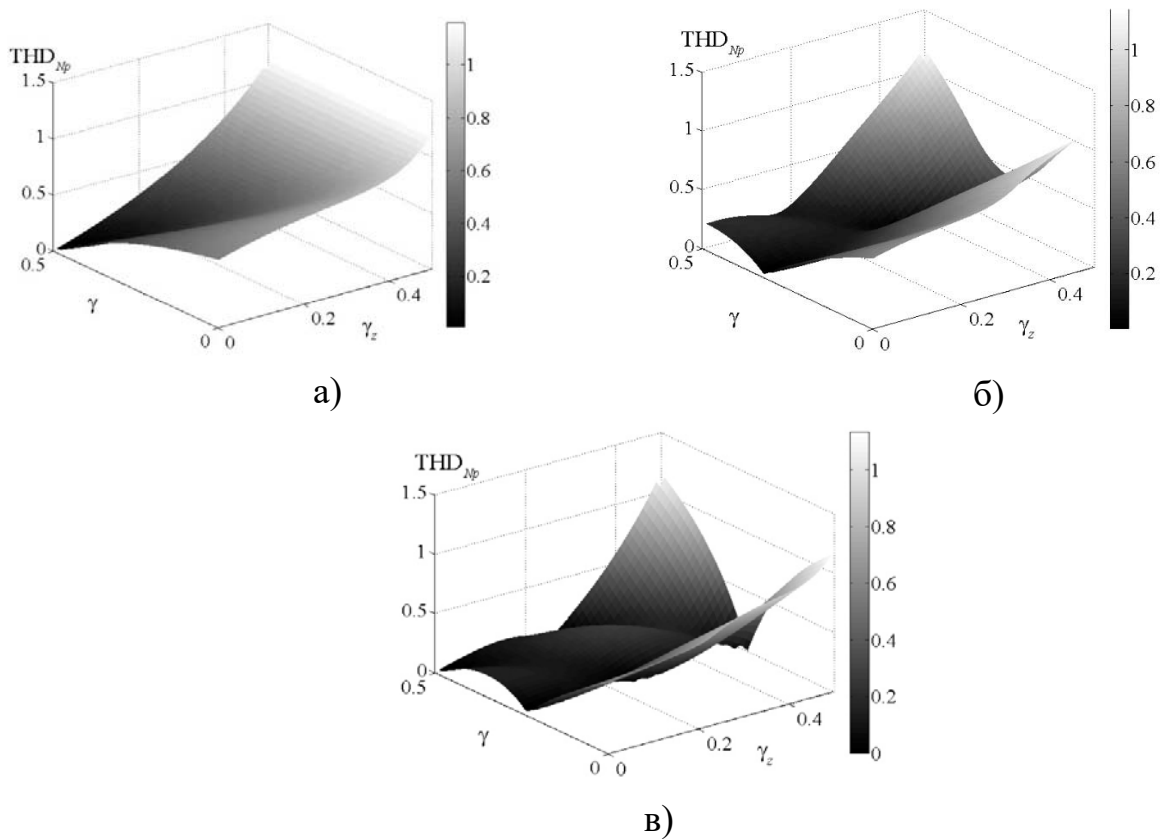


Рис. 6.9. Функціональна залежність коефіцієнта нелінійних спотворень THD_{Np} від параметрів γ та γ_z для різної кількості комірок: а) $N = 2$, б) $N = 3$, в) $N = 4$

Розраховані значення параметрів χ і THD дійсні для постійних значень параметрів γ та γ_z . Протягом процесу заряджання струм і напруга заряджання батареї постійно змінюються і відповідно змінюються параметри γ та γ_z . Тому при виборі комірок зарядного пристрою N доцільно визначити функціональну залежність параметрів γ та γ_z від часу протягом всього процесу заряджання, $\gamma = f(t)$, $\gamma_z = f(t)$, і оцінити середньозважені залежності параметрів χ і THD протягом всього процесу заряджання.

6.1.5. Розрахунок режимів заряджання батареї

Акумуляторна батарея заряджається комбінованим методом: на початковому інтервалі у режимі постійного струму (ПС), на завершальному – у режимі постійної напруги (ПН) [237, 238]. Для забезпечення режиму протікання вхідного струму комірок, близького до ГРП, $\gamma_z \rightarrow 0$, протягом обох режимів заряджання необхідно використовувати спеціальні закони модуляції напруги комірок.

У режимі ПС струм акумулятора має постійне значення $I_{cell} = I_{CC}$, а напруга поступово зростає від мінімального значення $U_{b_min} = 17.5$ В до максимального $U_{b_max} = 29.4$ В. Відповідно до цього, при постійному діючому значенні напруги мережі, $U_{in} = \text{const}$, пропорційно до напруги батареї зростає діюче значення струму мережі I_{in} з мінімального значення I_{in_min} до максимального I_{in_max} :

$$I_{in_min} = \frac{I_{CC} \cdot U_{b_min}}{U_{in} \cdot \eta_{cell}}; \quad (6.25)$$

$$I_{in_max} = \frac{I_{CC} \cdot U_{b_max}}{U_{in} \cdot \eta_{cell}}, \quad (6.26)$$

де η_{cell} – ККД комірки.

Збільшення амплітудного значення вхідного струму призводить до збільшення тривалості інтервалів наростання та спадання струму, див. формули (6.1) і (6.2). Одночасно з цим, збільшення напруги батареї призводить до зменшення тривалості інтервалу спадання струму. Тому протягом заряджання батареї у режимі ПС змінюється як період T так коефіцієнт заповнення імпульсів γ .

Припустимо, що в початковий момент часу напруга на батареї має значення U_{b1} і комірка працює в режимі ГРП, $\gamma_z = 0$, з тривалістю періода T_1 і тривалістю імпульсу $\gamma_1 \cdot T_1$ та вхідним струмом I_{in1} . Після певного часу напруга батареї зросла на значення ΔU_b , тоді струм мережі I_{in2} зросте на значення ΔI_{in} :

$$I_{in2} = I_{in1} + \Delta I_{in} = I_{in1} + \frac{\Delta U_b}{U_{b1}} \cdot I_{in1}, \quad (6.27)$$

а тривалість імпульсу $\gamma_2 \cdot T_2$ розраховується згідно з формулою (6.1):

$$\gamma_2 \cdot T_2 = \gamma_1 \cdot T_1 + \frac{\Delta I_{in}}{I_{in1}} \cdot T_1. \quad (6.28)$$

Тривалість паузи $(1-\gamma_2) T_2$ з одного боку збільшується разом з тривалістю імпульсу $\gamma_2 \cdot T_2$, з іншого – зменшується зі збільшенням напруги на батареї U_b . Рівняння для розрахунку паузи є таким:

$$I_{in2} - \frac{U_{b2}}{L_1} (1 - \gamma_2) \cdot T_2 = 0. \quad (6.29)$$

Після підстановки струму I_{in2} і напруги U_{b2} вираз (6.29) перетвориться до виду:

$$(1 - \gamma_2) T_2 = \frac{L_1 I_{in1}}{U_{b1}}, \quad (6.30)$$

що свідчить про постійне значення паузи в режимі ПС, $(1-\gamma_2) \cdot T_2 = (1-\gamma_1) \cdot T_1$. Тому в режимі ПС для зменшення нульової паузи доцільно використовувати ЧІМ з постійною тривалістю паузи, як показано на рис. 6.10, а.

У режимі ПН напруга батареї є постійною, $U_b = U_{CV}$, а струм i_b експоненційно спадає до нуля:

$$i_b(t') = I_{cc} e^{-\frac{t'}{\tau}}, \quad (6.31)$$

де t' - час відносно початку режиму ПН, τ – стала часу заряджання батареї.

У цьому режимі модуляції використовується ЧІМ з постійним значенням коефіцієнта заповнення імпульсів, $\gamma = \text{const}$ як показано на рис. 6.10, б. При цьому частота ЧІМ оберненопропорційна струму батареї i_b . Якщо вважати, що процес заряджання батареї завершується, коли струм i_b зменшиться до 10% від номінального значення I_{CC} [239], $i_b = 0.1 I_{CC}$, частота роботи комірки збільшиться в 10 разів для підтримання режиму ГРП. Зважаючи на зниження ККД та погіршення

режимів роботи компонентів перетворювача зі значним збільшенням частоти, доцільно обмежити значення частоти на заданому рівні f_{\max} . За умови, що частота роботи перетворювача f досягає максимально допустимого значення f_{\max} , комірка починає працювати у режимі ПРП з постійною частотою f_{\max} , $f = f_{\max}$, з ШІМ як показано на рис. 6.10, в.

У режимі ШІМ струм батареї i_b виражається через коефіцієнт γ таким чином:

$$i_b = k_b \gamma^2, \quad (6.32)$$

де k_b – постійний коефіцієнт.

З аналізу формули (6.32) можна зробити висновок, що зміна значення струму у діапазоні 10% - 100% від I_{CC} досягається при зміні параметра γ у співвідношенні 1:3.1.

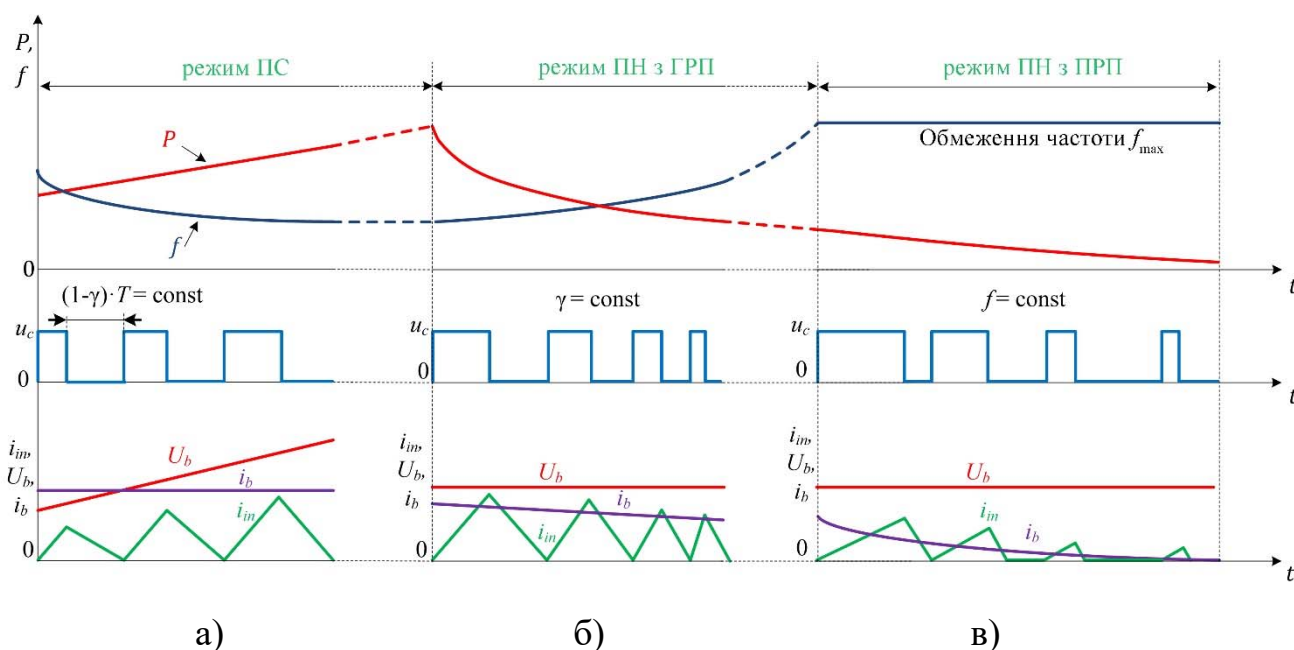


Рис. 6.10. Узагальнені часові діаграми заряджання батареї: а) режим ПС; б) режим ПН з ГРП; в) режим ПН з ПРП

Загалом процес заряджання батареї проходить у трьох режимах:

- у режимі ПС з ЧІМ з постійною тривалістю паузи та ГРП;
- у режимі ПН з ЧІМ з постійним параметром γ та ГРП;
- у режимі ПН з ШІМ з ПРП.

При цьому слід мати на увазі, що через повільну зміну параметрів протягом процесу заряджання відносно періоду напруги мережі, вищеперераховані режими є глобальними стратегіями керування зарядним пристроєм, тоді як локально на кожному окремому періоді напруги використовується ШІМ модуляція з постійними параметрами, значення яких перераховуються на початку кожного наступного напівперіода напруги мережі.

6.1.6. Розрахунок усереднених показників параметрів якості струму протягом процесу заряджання

Протягом процесу заряджання коефіцієнт заповнення імпульсів зростає від мінімального γ_{\min} до максимального γ_{\max} значення. З аналізу залежностей параметрів якості електроенергії χ і THD , зображених на рис. 6.7-6.9, можна зробити висновок, що найкращі значення параметри якості електроенергії мають в околі точки $\gamma = 0.5$. Зважаючи на обмеження на параметр γ , $\gamma \leq 0.5$, зумовлене значними перевантаженнями ключових елементів перетворювача у режимі $\gamma > 0.5$, доцільно встановити максимальне значення γ еквівалентне прийнятому обмеженню, $\gamma_{\max} = 0.5$.

Зважаючи на неможливість точно підтримувати режим ГРП протягом процесу заряджання, доцільно встановити відносну тривалість нульової паузи γ_z , що убезпечує від переходу у неперервний режим, орієнтовно $\gamma_z = 0.05$.

Оскільки при формуванні вхідного струму за допомогою модульного перетворювача SEPIC форма струму повторює форму напруги мережі, можна вважати, що зсув фаз між першою гармонікою напруги і струму близький до нуля [240]. У цьому випадку між параметрами якості електроенергії χ і THD є функціональна залежність:

$$THD = \sqrt{\frac{1}{\chi^2} - 1}, \quad (6.32)$$

тому можна порахувати середньозважене значення одного з параметрів, наприклад THD , а значення іншого визначити зі співвідношення (6.32).

Заданося бажаним середньозваженими значення THD , $THD_{goal} = 0.10$, тоді отримане середньозважене значення THD_{real} не повинне перевищувати цільове, $THD_{real} \leq THD_{goal}$ під час заряджання батареї, починаючи з мінімального значення $U_{bmin} = 17.5$ В до максимального $U_{bmax} = 29.4$ В. Як було визначено вище, максимальне значення коефіцієнта γ дорівнює $\gamma_{max} = 0.5$, що відповідає напрузі U_{bmax} . При незмінному діючому значенні напруги мережі можна записати такі співвідношення:

$$U_{bmin} = U_{in} \frac{\gamma_{min}}{1 - \gamma_{min}}; U_{bmax} = U_{in} \frac{\gamma_{max}}{1 - \gamma_{max}}. \quad (6.33)$$

Виразивши з формули (6.33) γ_{min} , отримаємо:

$$\gamma_{min} = \frac{k_U \gamma_{max}}{1 + \gamma_{max} (k_U - 1)} \approx 0.373, \quad (6.34)$$

де $k_U = U_{bmin} / U_{bmax}$.

Середньозважене значення THD , THD_{av} розраховується за формулою:

$$THD_{av} = \frac{1}{T_{charge}} \frac{\int_0^{T_{charge}} THD(\gamma(t)) \cdot p(t) dt}{\int_0^{T_{charge}} p(t) dt}, \quad (6.35)$$

де T_{charge} – час заряджання батареї, $p(t)$ – миттєве значення потужності, що використовується як вагова функція.

Формула (6.35), що описує середньозважене значення коефіцієнта нелінійних спотворень THD_{av} , з врахуванням розглянутих режимів заряджання може бути перетворена до виду:

$$THD_{av} = \frac{1}{T_{charge} \int_0^{T_{charge}} p(t) dt} \left(\int_0^{T_{ПС}} THD(\gamma(t)) \cdot I_{CC} \cdot u_b(t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^{T_{ПН_ГРП}} THD(\gamma_{max}) \cdot U_{bmax} \cdot i_b(t) dt + \int_0^{T_{ПН_ПРП}} THD(\gamma(t)) \cdot U_{bmax} \cdot i_b(t) dt \right), \quad (6.36)$$

де $T_{ПС}$, $T_{ПН_ГРП}$, $T_{ПН_ПРП}$ тривалості заряджання батареї у режимах ПС, ПН з ГРП, ПН з ПРП відповідно, u_b , i_b – миттєві значення напруги і струму батареї.

Задамо усі невідомі функції у інтегралах формули (6.36) з метою подальшого інтегрування.

У режимі ПС напруга батареї лінійно змінюється з часом:

$$u_b(t) = U_{b\min} + \frac{(U_{b\max} - U_{b\min})t}{T_{\text{ПС}}}. \quad (6.37)$$

Струм батареї у режимі ПН розраховується за формулою (6.31). При заряджанні Li-ion акумуляторів тривалість режиму ПС триває близько 1 год., $T_{\text{ПС}} = 1$ год., тоді як повна тривалість процесу заряджання складає близько 3 год, $T_{\text{charge}} = 3$ год [239]. Тому тривалість режиму ПН складає третину від всього процесу заряджання, $T_{\text{ПС}} = T_{\text{charge}} / 3$. Співвідношення між режимами ПН з ГРП та ПН з ПРП залежить від співвідношення мінімальної f_{\min} та максимальної f_{\max} частот, $k_f = f_{\min} / f_{\max}$ і співвідношенням між мінімальним I_{\min} та номінальним $I_{\text{СС}}$ зарядним струмом, $k_i = I_{\min} / I_{\text{СС}}$:

$$T_{\text{ПН_ГРП}} = T_{\text{ПН_ПРП}} \cdot \log_{k_i}(k_f). \quad (6.38)$$

Для заданого діапазону частот $f_{\min} = 30$ кГц, $f_{\max} = 120$ кГц та діапазону струмів $I_{\text{СС}} = 8$ А, $I_{\min} = 0.8$ А, з формули (6.38) отримаємо співвідношення $T_{\text{ПН_ГРП}} \approx 0.6 T_{\text{ПН_ПРП}}$. Знаючи сумарну тривалість інтервалів, $T_{\text{ПН_ГРП}} + T_{\text{ПН_ПРП}} = 2$ год, можна визначити тривалість кожного інтервалу $T_{\text{ПН_ПРП}} = 1.25$ год, $T_{\text{ПН_ГРП}} = 0.75$ год. При цьому струм у режимі ПН з ГРП змінюється в діапазоні, $i_b = I_{\text{СС}} \dots I_{\text{СС}} f_{\min} / f_{\max}$; в режимі ПН з ПРП $i_b = I_{\text{СС}} f_{\min} / f_{\max} \dots 0.1 I_{\text{СС}}$.

Розрахунок середньозваженого значення THD_{av} можливий лише при визначенні залежності параметрів γ і γ_z від часу протягом кожного режиму заряджання. У режимі ПС параметр γ_z має постійне значення, $\gamma_z = 0.05$, а значення γ визначається з формули (6.37) та регулювальної характеристики перетворювача:

$$\gamma = \frac{(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})t + \gamma_{\min} T_{\text{ПС}} (1 - \gamma_{\max})}{(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})t + T_{\text{ПС}} (1 - \gamma_{\max})}. \quad (6.39)$$

У режимі ПН з ГРП параметри γ_z і γ мають постійні значення, $\gamma_z = 0.05$, $\gamma = \gamma_{\max} = 0.5$. У режимі ПН з ПРП параметр γ змінюється згідно з формулою (6.32):

$$\gamma = \sqrt{\gamma_{\max} e^{\frac{t}{\tau}}}, \quad (6.40)$$

а значення γ_z :

$$\gamma_z = 2(\gamma_{\max} - \gamma). \quad (6.41)$$

Підставивши отримані значення до формули (6.36) та проінтегрувавши її складові для випадку $N = 2, 3, 4$ отримаємо такі значення: для $N = 2$ – $THD_{av} = 0.157$, для $N = 3$ – $THD_{av} = 0.113$, для $N = 4$ – $THD_{av} = 0.092$.

Отже, цільове значення для коефіцієнта нелінійних спотворень $THD_{goal} = 0.10$ досягається для $N = 4$ комірок. Для заданої кількості комірок у табл. 6.2 наведено розрахункові значення параметрів THD і χ для робочого діапазону параметра γ .

Табл. 6.2. Розрахункові значення параметрів χ та THD

γ	THD	χ
0.15	0.150	0.989
0.2	0.119	0.993
0.25	0.078	0.997
0.3	0.090	0.996
0.35	0.100	0.995
0.4	0.100	0.995
0.45	0.090	0.996
0.5	0.078	0.995

Розглянемо особливості практичної реалізації модульного зарядного пристрою.

6.2. Схемна реалізація модульного перетворювача

6.2.1. Структура та принцип керування перетворювачем

Розглянуті теоретичні співвідношення використано для проектування модульного чотирикоміркового зарядного пристрою для Li-ion акумуляторів потужність 400 Вт.

Зарядний пристрій має два гальванічно розв'язаних канали для двох встановлених батарей. У конфігурації, представленій на рис. 6.11, комірки SEPIC мають дві вторинні обмотки. Акумулятори двох каналів підключені до відповідних вторинних обмоток кожної комірки SEPIC, що дозволяє забезпечити природне врівноваження заряду, якщо початковий заряд батарей не однаковий. Потенційно таку конфігурацію можна розширити, щоб забезпечити зарядку окремих елементів батареї.

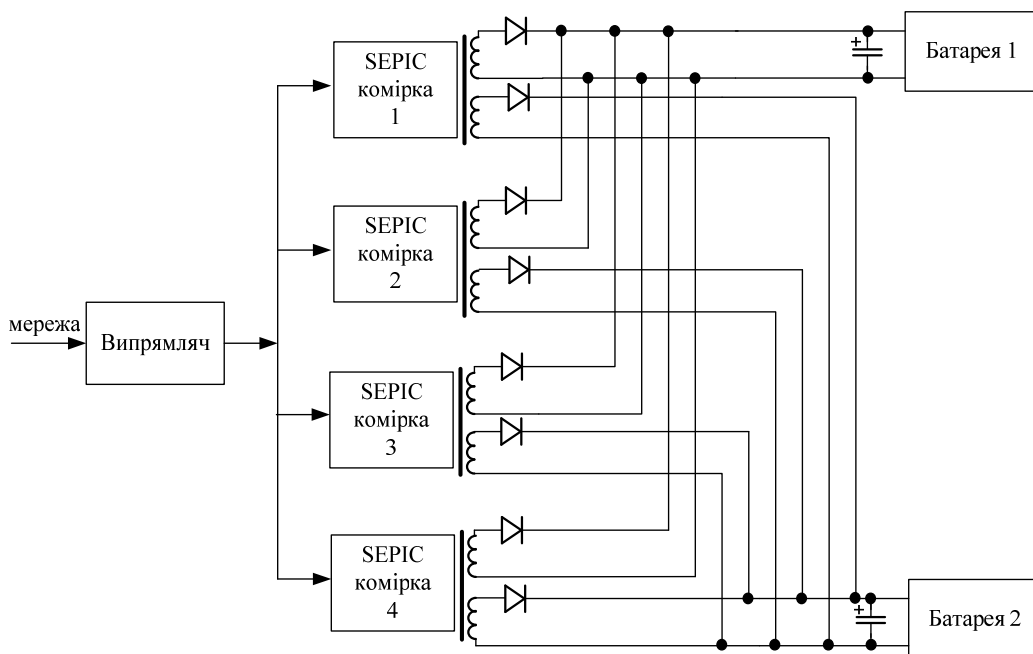


Рис. 6.11. Структура 4-коміркового модульного зарядного пристрою з природним балансуванням напруги

Оскільки перетворювач комірки в основному працює в граничному режимі протікання струму, необхідно ефективно визначати цей режим. На рис. 6.12 зображені часові діаграми на елементах комірки SEPIC на півперіоді напруги мережі u_{in} . Тривалість $t_{0(k+2)}$ нульової паузи повинна мати своє мінімальне значення при максимальній напрузі U_{in_max} , тоді перетворювач працює у режимі близькому до ГРП.

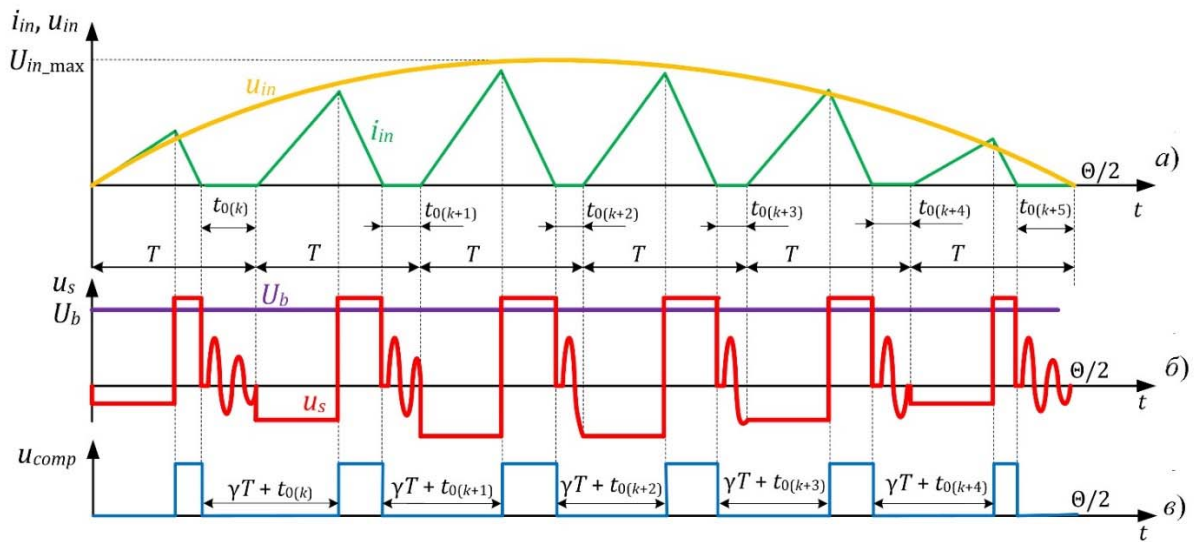


Рис. 6.12. Часові діаграми для ілюстрації ГРП: а) діаграма вхідного струму i_{in} ; б) напруга вторинної обмотки трансформатора u_s ; в) напруга на виході компаратора u_{comp}

Режим ПРП може бути легко виявлений за допомогою напруги вторинної обмотки трансформатора u_s , рис. 6.12, б. За допомогою порівняння напруги u_s з напругою акумулятора U_b компаратором можливо отримати прямокутні імпульси напруги, рис. 6.12, в. Сигналу компаратора високого рівня відповідає інтервал спадання струму, коли струм проводить вихідний діод перетворювача SEPIC. Низький рівень відповідає сумі тривалостей інтервалу наростання струму (замкнений стан вхідного транзистора) і інтервалу нульової паузи. Оскільки тривалість інтервалу наростання струму відома і дорівнює константі γT , що не змінюється протягом напівперіода $\Theta/2$ випрямленої напруги, інтервал паузи $\gamma_z T$ можна визначити, віднімаючи γT від тривалості низького рівня напруга компаратора.

ГРП реалізовано на основі сигналу від синхронного драйвера випрямляча DA_1 на виході комірки SEPIC, як показано на рис. 6.13.

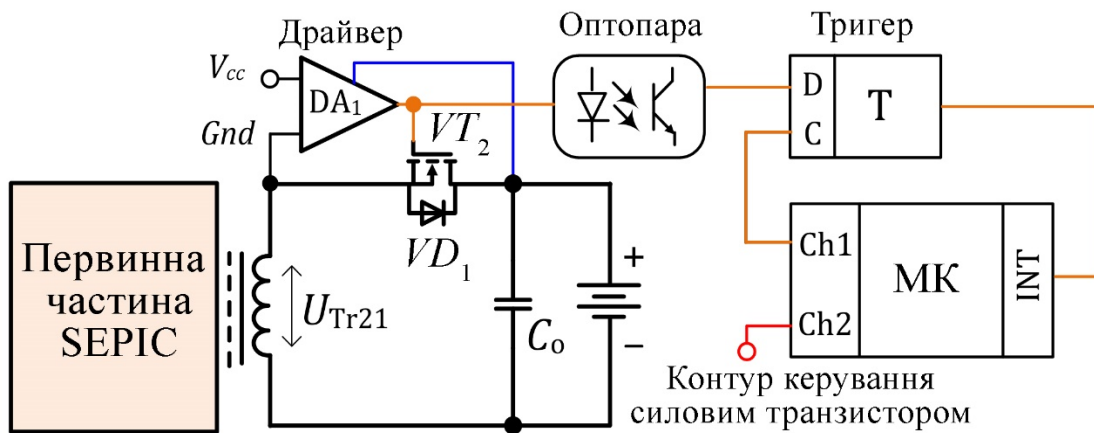


Рис. 6.13. Функціональна схема контролю ГРП на основі драйвера синхронного випрямлення (МК – мікроконтролер)

Сигнал керування синхронного випрямлення, що генерується драйвером DA_1 , використовується для виявлення ПРП подається на вхід даних «D» D-тригера. Одночасно на вхід синхронізації тригера «C» надходить ШІМ сигнал каналу 1 (Ch1), u_{ch1} блоку мікроконтролера МК, синхронізованого з ШІМ сигналом u_{ch2} каналу 2 (Ch2), який керує вхідним транзистором VT_1 за принципом, показаним на рисунку 6.14. Завдяки змінній ширині імпульсу ШІМ сигналу u_{ch1} , може бути досягнута попередньо визначена тривалість нульової паузи $\gamma_z T$. В іншому випадку генерується сигнал низького рівня переривання і МК збільшує період ШІМ з T до значення $T + \Delta T$.

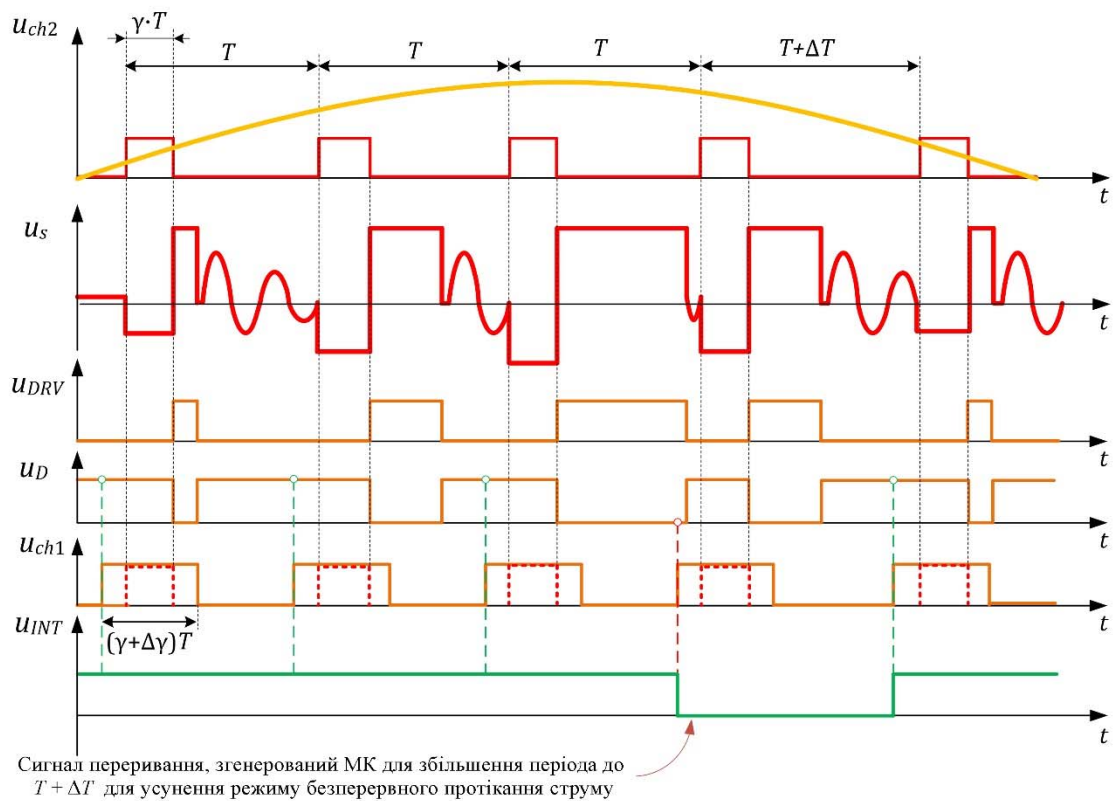


Рис. 6.14. Часові діаграми керування режимом ГРП (напруга вторинної обмотки трансформатора u_s , сигнал керування синхронним випрямленням u_{DRV} , сигнал на вході тригера u_D , сигнал першого каналу ШІМ u_{ch1} і сигнал переривання МК u_{INT}).

Описаний метод дозволяє реалізувати керування на частоті ШІМ на основі логічних мікросхем, при цьому МК використовується тільки для керування процесом заряджання акумулятора. Такий принцип реалізується завдяки тому, що протягом кожного періода мережі керування зарядним пристроєм забезпечується з використанням ШІМ, тоді як протягом усього процесу заряджання використовується більш гнучке керування, що забезпечує кращі параметри якості електроенергії, за законами модуляції отриманими в розділі 6.1.4 та зображеними на рис. 6.10. Діаграма, що демонструє узагальнений принцип реалізації режимів ПС і ПН під час процесу заряджання представлена на рис. 6.15.

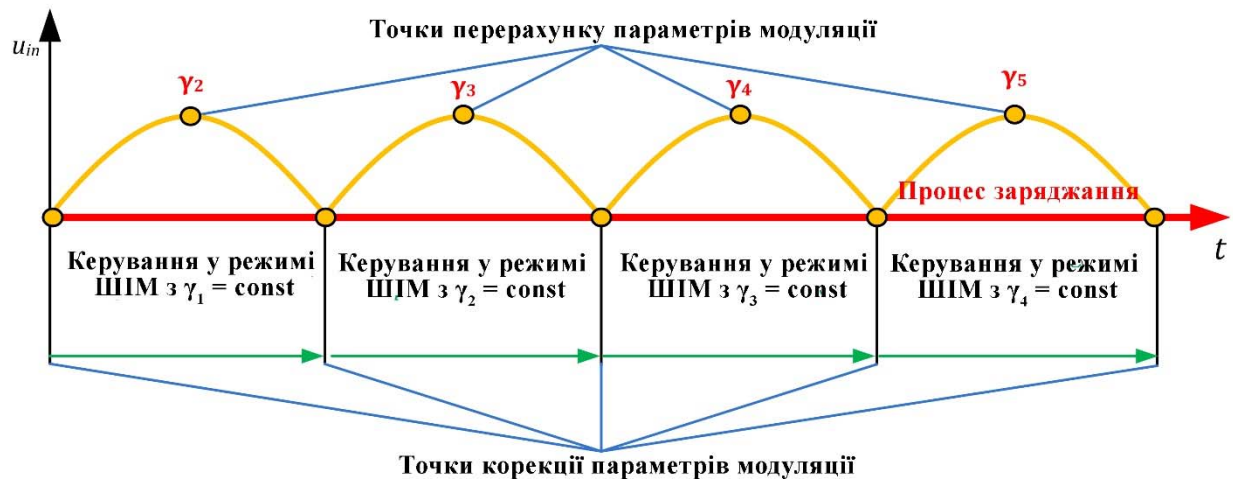


Рис. 6.15. Загальний принцип перерахунку параметрів протягом процесу заряджання

Як показано на рис. 6.15, перерахунок параметрів модуляції виконується в точках з амплітудним значенням випрямленої напруги. Перераховані значення параметрів модуляції коригуються на початку кожного наступного півперіоду напруги мережі.

6.2.2. Експериментальні результати

У додатку В розраховані елементи силової частини зарядного пристрою, регенеративного снабера [241-245] та продемонстровано принципову схему, друковану плату та експериментальний макет зарядного пристрою. Для оцінки режимів роботи модульного зарядного пристрою розглянуті наступні питання:

- забезпечення ГРП вхідного струму на основі логічних мікросхем та генерації переривань МК;
- функціонування регенеративного снабера на основі зворотноходового перетворювача;
- перевірка рівня перевантаження за напругою та струмом на транзисторах у первинному колі, трансформаторах та випрямних транзисторах.
- перевірка значень коефіцієнта потужності χ , коефіцієнта нелінійних спотворень THD та ККД під час заряджання батареї.

Перевірка функціонування ГРП

Зарядний пристрій працює в одному з режимів ГРП або ПРП, які регулюються тривалістю нульової паузи $\gamma_z T$. Тому тривалість нульової паузи повинна бути стабільною та легко змінюватись. Для керування тривалістю нульової паузи використовується сигнал драйвера синхронного випрямляча. Як показано на рис. 6.16 сигнал синхронного випрямлення збільшується разом із входною напругою. Принцип виявлення ПРП детально продемонстровано на рис. 6.17, а та б при розімкненому зворотному зв'язку, при цьому мікроконтролер не реагує на сигнал переривання від драйвера.

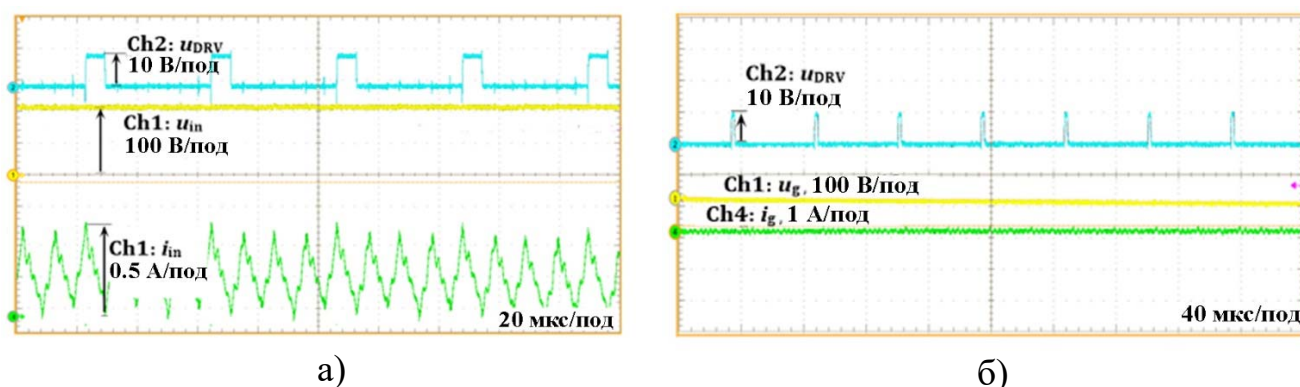


Рис. 6.16. Часові діаграми синхронного випрямлення: а) біля максимального значення напруги мережі; б) біля нульового значення напруги мережі

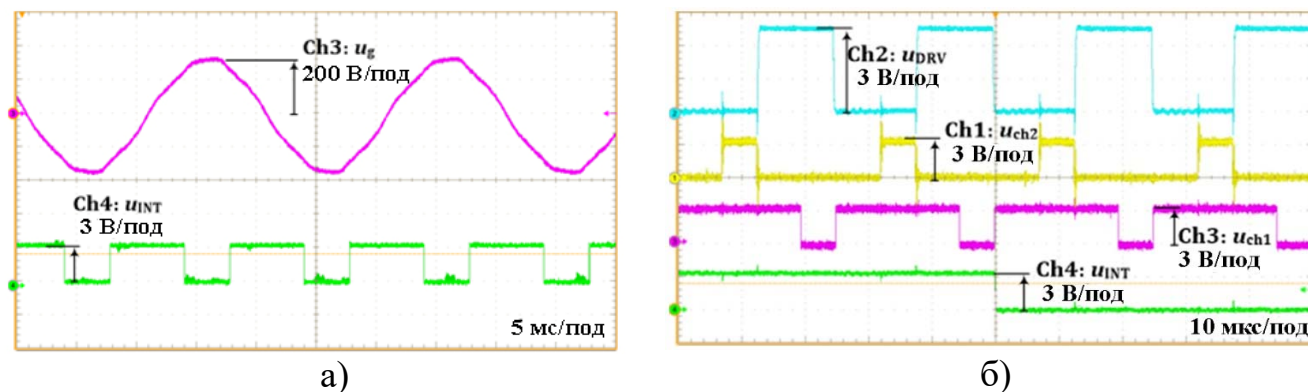


Рис. 6.17. Часові діаграми контролю ПРП: а) формування сигналу переривання на декількох періодах напруги мережі; б) діаграми формування заднього фронту сигналу переривання

У запропонованому способі керування сигнал переривання u_{INT} виникає, коли тривалість інтервалу нульової паузи струму $\gamma_z T$ менше, ніж задане значення тривалості імпульсу ШІМ сигналу u_{ch1} , рис. 6.17, б. Оскільки тривалість нульової

паузи зменшується зі зростанням вхідної напруги, сигнал переривання u_{INT} розміщується симетрично відносно значення амплітуди напруги, рис. 6.16 а). Задній фронт сигналу переривання u_{INT} створюється, коли сигнал драйвера синхронного випрямлення u_{DRV} має високий рівень і виникає передній фронт сигналу u_{ch1} , рис. 6.17, б. За умови активації переривання, тривалість ПРП регулюється протягом одного періоду ШІМ, що не дозволяє перетворювачу перейти у неперервний режим протікання струму.

Перевірка функціонування зворотноходового перетворювача

Діаграми вхідної напруги u_{c2} та вихідного струму першого каналу i_{ch1} зворотноходового перетворювача показано на рис. 6.18. Оскільки конденсатор фільтра C_2 розраховано на частоту мережі, пульсація напруги на вході перетворювача є незначною, як показано на рис. 6.18, а. На рис. 6.18, б показано аналогічні параметри на декількох періодах ШІМ.

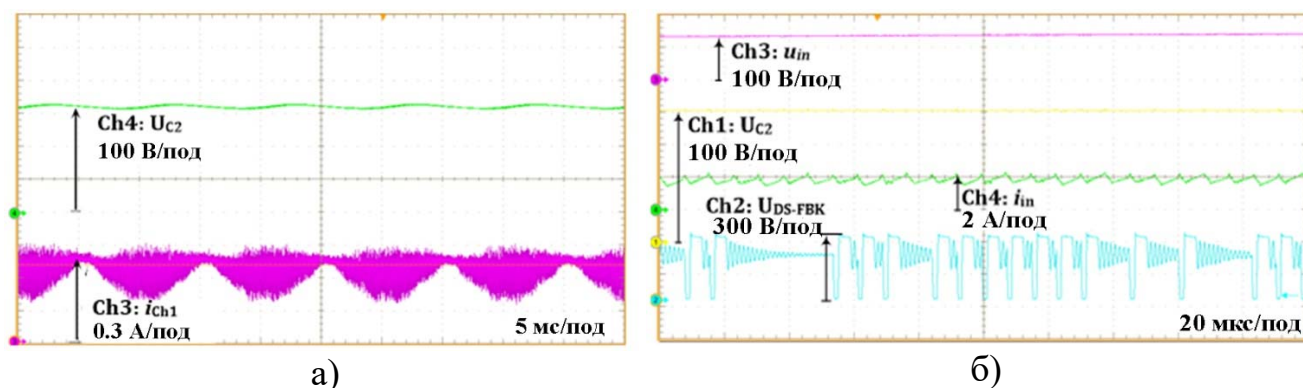


Рис. 6.18. Напруга конденсатора C_2 і вихідний струм каналу зворотноходового перетворювача на декількох періодах мережі а) часові діаграми вхідної напруги u_{c2} та вихідного струму першого каналу i_{ch1} зворотноходового перетворювача на декількох періодах мережі; б) часові діаграми вхідної напруги u_{c2} та вихідного струму першого каналу i_{ch1} на декількох періодах ШІМ

Часові діаграми роботи комірок зарядного пристрою

Часові діаграми струму комірок показано на рис. 6.19, а. Як зазначалося, незважаючи на ПРП струму кожної комірки, сумарний вхідний струм має значно меншу пульсацію. Завдяки роботі зворотноходового перетворювача сплески напруги, зумовлені наявністю індуктивності розсіювання, обмежуються значенням

600 В, що показано на рис. 6.19, б. Діаграми напруг синхронного випрямляча та трансформатора у режимі ПРП показано на рис. 6.20.

Форми хвиль зарядних напруг та струмів для збалансованих за напругою батарей показано на рис. 6.21, а, для незбалансованих – на рис. 6.21, б. Як показано на рис. 6.21, б, акумулятор з меншою напругою заряджається з істотно більшим струмом, що дозволяє з часом вирівняти заряди акумуляторів. В обох випадках чітко спостерігається пульсація струму з подвійною частотою напруги мережі (100 Гц), що є особливістю топології SEPIC. Цю пульсацію можна зменшити, застосувавши більші за ємністю вихідні конденсатори фільтра. Тим не менш, згідно з попередніми дослідженнями, пульсація струму не повинна мати істотного негативного впливу на літій-іонні акумулятори [246].

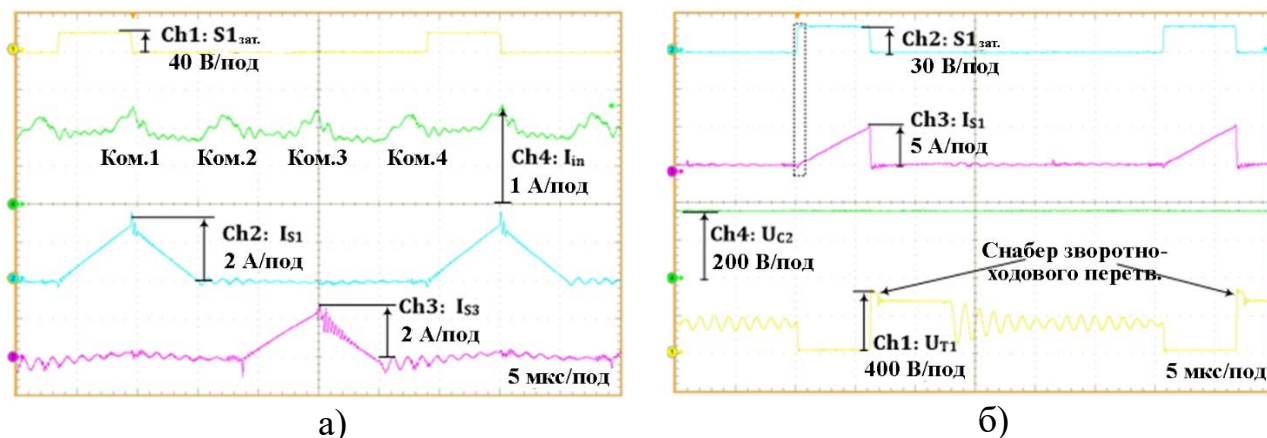


Рис. 6.19. Часові діаграми роботи в ПРП: а) струм комірок; б) обмеження напруги на ключових елементах завдяки зворотноходовому перетворювачу

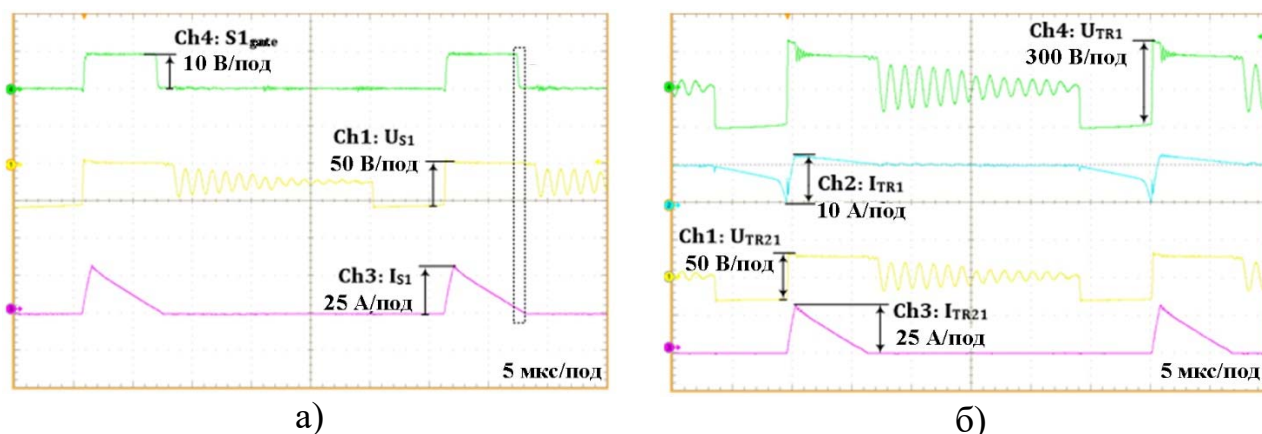


Рис. 6.20. Часові діаграми роботи в ПРП: а) сигнал керування драйвера синхронного випрямлення; б) напруга і струм трансформатора комірки SEPIC

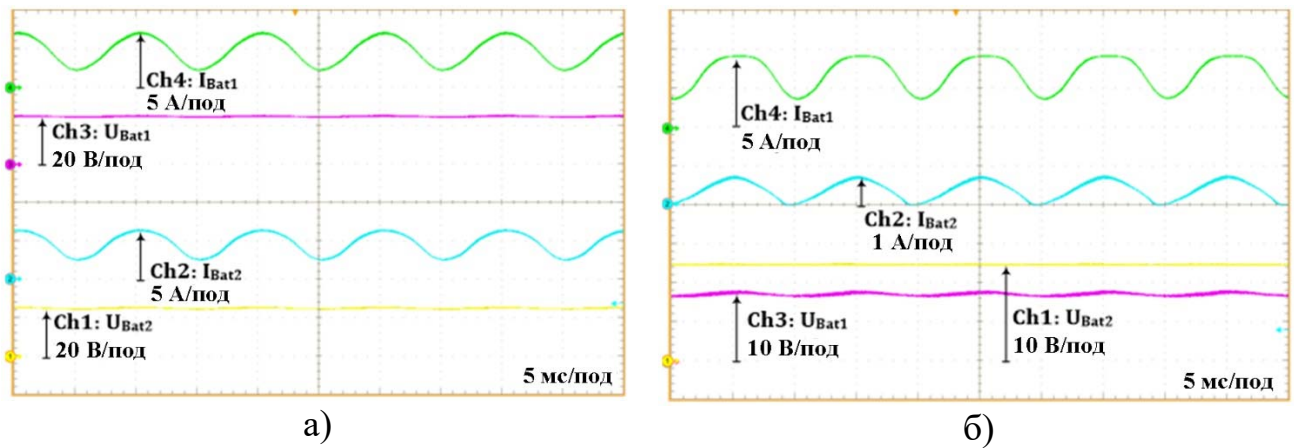


Рис. 6.21. Зарядний струм і напруга батарей: а) при однаковому заряді батарей; б) при різному заряді батарей

Верифікація значень параметрів якості електроенергії і визначення ККД

Для оцінки ККД, коефіцієнта нелінійних спотворень THD та коефіцієнта потужності χ проаналізовано ряд режимів роботи зарядного пристрою з $\gamma \in [0.15; 0.5]$. Осцилограма форми вхідного струму при $\gamma = 0.25$ і $\gamma = 0.5$ показана на рис. 6.22, а і б відповідно. Для заданого діапазону γ отримано профіль заряджання батарей, зображений на рис. 6.23.

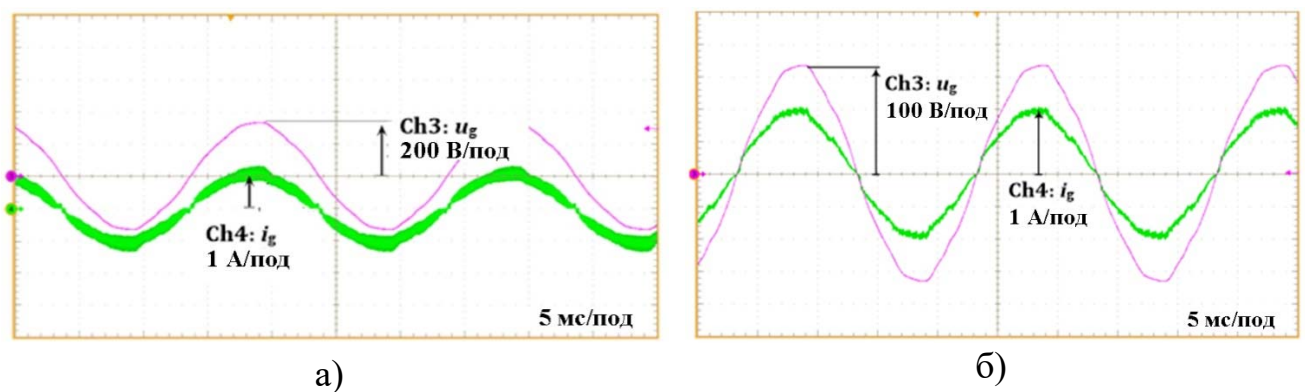


Рис. 6.22. Осцилограми вхідного струму і напруги: а) при $\gamma = 0.25$; б) при $\gamma = 0.5$

Відповідно до отриманих діаграм струмів, можна зробити висновок, що форма струму у заданому діапазоні γ є близькою до синусоїдальної.

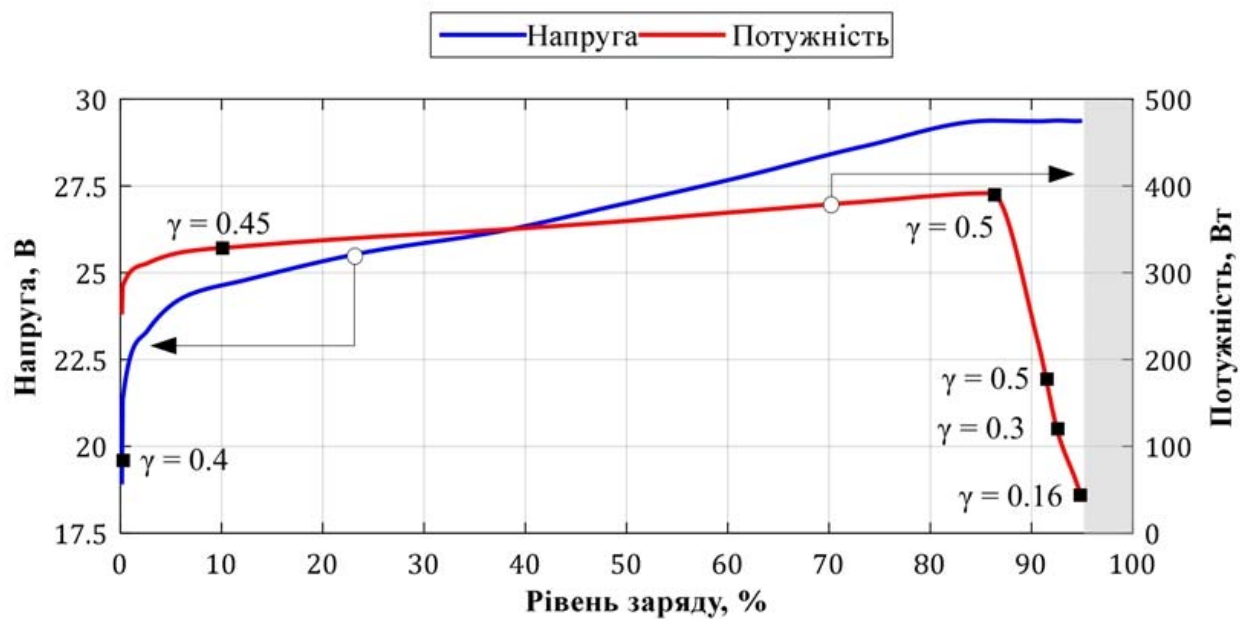


Рис. 6.23. Профіль заряду батареї струмом 0.5C

У результаті оцінки параметрів якості електроенергії в діапазоні $\gamma \in [0.15; 0.5]$ було виміряно масив значень параметрів χ , THD та ККД, наведених у табл. 6.3. та побудовано криву ККД, показану на рис. 6.24. У табл. 6.3 додатково наведене значення THD напруги для оцінки спотворень напруги мережі.

Табл. 6.3. Виміряні значення параметрів χ та THD

γ	$THD(i_g)$	χ	$\eta, \%$	$THD(u_g)$
0.15	0.180	0.984	88.5	0.027
0.2	0.124	0.988	90.6	0.026
0.25	0.100	0.995	91.9	0.028
0.3	0.110	0.994	92.3	0.024
0.35	0.119	0.993	92.6	0.027
0.4	0.110	0.994	92.8	0.024
0.45	0.110	0.994	92.7	0.029
0.5	0.100	0.995	92.4	0.026

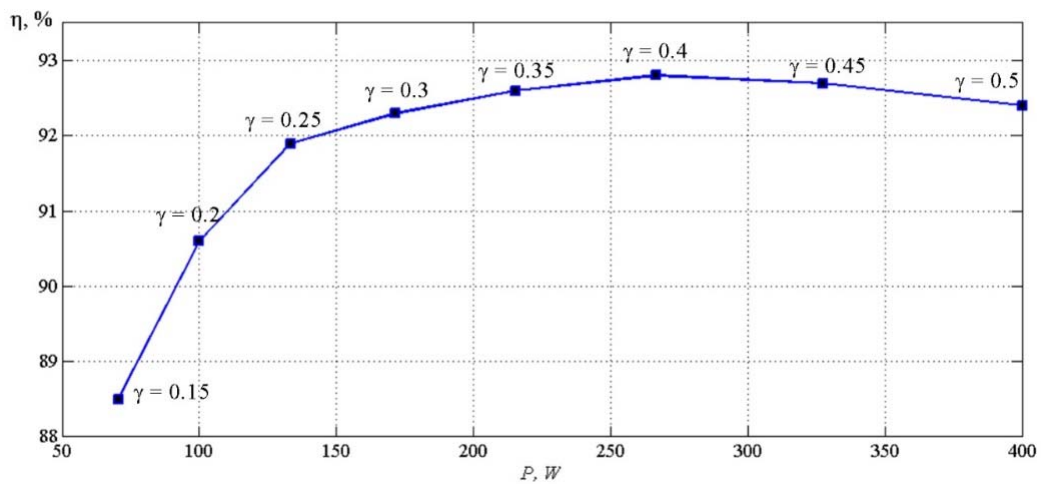


Рис. 6.24. Експериментальна крива залежності ККД від потужності

Доволі високе значення ККД, що в окремих режимах наближається до значення $\eta = 93 \%$ свідчить про високу ефективність модульної топології SEPIC. А отримані значення коефіцієнта нелінійних спотворень THD і коефіцієнта потужності χ , наведені у табл. 6.3 у цілому збігаються з теоретично виведеними залежностями, результати розрахунку яких у окремих точках наведені у табл. 6.2, що свідчить про ефективність використання узагальненого ряду Фур'є для вибору кількості комірок модульного зарядного пристрою.

6.3. Аналіз переваг узагальненого ряду Фур'є

Наведені у роботі результати застосування узагальненого ряду Фур'є декількох змінних свідчать про ефективність методу у випадку представлення сигналу струму або напруги, що утворені внаслідок взаємодії декількох процесів, а саме: 1) вхідної напруги; 2) збурень, наведених на вхідну або вихідну напругу; 3) модульованої задавальної дії. Використання узагальненого ряду Фур'є дозволяє компактно описати утворений струм або напругу в аналітичній формі та використовувати отримані вирази для аналізу спектральних властивостей та формування законів керування. Завдяки використанню узагальненого ряду Фур'є при вирішенні таких задач, як: 1) аналіз інтергармонік; 2) опис сигналів зі складними законами модуляції, наприклад з використанням декількох модулюючих функцій; 3) синтез математичних моделей струмів і напруг в частотній області; 4) формування законів керування за значенням параметрів якості

електроенергії, отримуються суттєві переваги у порівнянні з рядом Фур'є однієї змінної. Серед них доречно виділити такі:

по-перше, у задачах аналізу: 1) опис одним математичним виразом напруги або струму, утворених в результаті взаємодії модулюючих функцій і збурюючих факторів; 2) зменшення кількості операцій при розрахунку інтегральних показників при зміні параметрів; 3) перехід від чисельного опису струмів і напруг при врахуванні збурюючих факторів і модулюючих функцій з використанням ряду Фур'є однієї змінної до аналітичного виду при застосуванні узагальненого ряду Фур'є;

по-друге, у задачах синтезу та проектування – досягнення значного зменшення кількості розрахунків.

Зменшення кількості розрахунків за умови використання узагальненого ряду Фур'є залежить від: 1) аналізованого спектрального діапазону; 2) кількості наборів можливих значень параметрів для розрахунку струму і напруги; 3) типу показників, для яких проводиться розрахунок; 4) кількості факторів, що впливають на спектр струму або напруги; 5) необхідного значення похибки розрахунків.

Загалом, як показано у параграфі 5.2, складність алгоритму розрахунку спектра на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних прямує до мінімально можливої теоретичної межі $O(N)$. Таку ж складність має алгоритм швидкого вейвлет перетворення [247]. Однак останній метод має обмежену спектральну роздільну здатність та може бути використаний лише для розрахунку значень гармонічних та інтергармонічних груп. Використання алгоритму швидкого перетворення Фур'є зі складністю $O(M \log(N))$ для розрахунку спектра з інтергармоніками також спричинює ефект розтікання спектра. Алгоритм на основі перетворення Гільберта-Хуанга з такою ж складністю [248] може бути використаний для розрахунку спектра гармонічних та інтергармонічних груп. Меншу похибку має алгоритм віконного перетворення Фур'є зі складністю $O(N^2)$. Алгоритм розрахунку гармонік на основі одношарової нейронної мережі має доволі

велику похибку та складність $O(N^2)$, тому використовується рідко. Інші параметричні методи та методи на основі кореляційного аналізу, використання яких базується на алгоритмі перетворення Фур'є, дозволяють отримати результат з достатньою точністю, але мають більшу складність, що коливається в діапазоні $O(M \log(N)) \dots O(N^2)$. Тому лише розроблений метод розрахунку спектра на основі ряду Фур'є декількох змінних та аналітичний ряд Фур'є однієї змінної дозволяють точно розраховувати спектр з інтергармоніками з мінімально теоретичною складністю $O(N)$. Однак використання ряду Фур'є однієї змінної ускладнене за умови формування сигналів внаслідок взаємодії навіть двох процесів, тому цей метод для таких задач на практиці майже не використовується.

За умови використання запропонованого метода у реальному масштабі часу також важливими є складність розрахунку:

- окремих гармонік, при цьому складність алгоритму згідно з формулою (5.33) складає $O(N^{1/M})$, що значно менше ніж у аналогів з трудомісткістю $O(N)$;
- інтегральних показників якості, при цьому завдяки аналітичному опису спектра в згорнутій формі складність складає $O(1)$, тобто не залежить від кількості аналізованих гармонік N , тоді як у інших методах для розрахунку параметрів якості електроенергії потрібно виконати $O(N)$ операцій;
- при багаторазовому перерахунку спектра при аналізі режимів роботи перетворювачів зі зміною окремих параметрів збурень. У цьому випадку при розрахунку спектра повторно використовуються розраховані спектральні компоненти, що дозволяє у разі пришвидшити алгоритм розрахунку.

Проаналізовані переваги наведено у табл. 6.4.

Таблиця 6.4. Переваги метода розрахунку спектра на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

Метод	Складність розрахунку		
	Спектр	Гармоніка	Параметр якості
Одношарова нейронна мережа	$O(N^2)$	$O(N)$	$O(N)$
Віконне перетворення Фур'є	$O(N^2)$	$O(N)$	$O(N)$
Параметричні та кореляційні методи на основі ШПФ	$O(M \log(N))$.. $O(N^2)$	$O(N)$	$O(N)$
Перетворення Гільберта-Хуанга	$O(M \log(N))$	-	$O(N)$
Швидке перетворення Фур'є	$O(M \log(N))$	$O(N)$	$O(N)$
Вейвлет перетворення	$O(N)$	-	$O(N)$
Пропонований метод	$O(N)$	$O(N^{1/M})$	$O(1)$

Наведені переваги метода є особливо важливим при використанні узагальненого ряду Фур'є у системах керування, що дозволяє використовувати ефективні алгоритми керування перетворювачами за значеннями параметрів якості електроенергії і, тим самим, зменшувати їх динамічні втрати та покращувати якість електроенергії. Як показано в параграфах 4.1.2 та 5.4.6 використання запропонованого метода дозволяє синтезувати закони керування у реальному масштабі часу, що придушують інтергармоніки та покращують параметри якості електроенергії.

Висновки до розділу 6

1. Показано, що модульні перетворювачі на основі топології SEPIC дозволяють забезпечити необхідні параметри якості електроенергії – коефіцієнт потужності і коефіцієнт нелінійних спотворень при використанні ШІМ модуляції і граничному режимі протіканні струму дроселя кожної комірки, що одночасно спрощує закон модуляції струму перетворювача та зменшує його динамічні втрати.

2. На основі узагальненого ряду Фур'є розроблено методику розрахунку кількості комірок модульного зарядного пристрою з використанням розрахункових співвідношень параметрів якості електроенергії.

3. Для оцінки параметрів якості електроенергії зарядного пристрою запропоновано розраховувати середньозважені параметри якості електроенергії протягом часу заряджання, та встановлено що нормам якості електроенергії відповідає чотирикомірковий зарядний пристрій.

4. Для перевірки теоретичних засад оцінки параметрів якості електроенергії розраховано елементи зарядного пристрою потужністю 400 Вт та виміряно часові діаграми струмів і напруг його основних вузлів, внаслідок чого встановлено, що експериментальні результати збігаються з теоретичними значеннями параметрів якості електроенергії: значення коефіцієнта потужності – не менше 0.99, коефіцієнт нелінійних спотворень – не більше 0.1 при коефіцієнті корисної дії не менше 0.92.

5. Запропонований метод розрахунку спектра має складність $O(N)$ нарівні з вейвлет перетворенням, що є теоретичною нижньою межею складності розрахунку спектра, однак на відміну від вейвлет перетворення запропонований метод дозволяє розраховувати значення окремих гармонік зі складністю $O(N^{1/M})$ та параметрів якості зі складністю $O(1)$ відповідно, що свідчить про його ефективність використання у системах керування, що синтезують закони керування у реальному масштабі часу та забезпечують покращення параметрів якості електроенергії приблизно в 2 рази.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У роботі вирішена наукова технічна проблема підвищення ефективності інтергармонічного аналізу та керування напівпровідниковими перетворювачами на основі побудови теорії спектрального аналізу та синтезу законів керування базованих на теорії ряду Фур'є декількох змінних.

При виконанні дисертаційної роботи отримано наступні наукові результати:

1. Показано негативний вплив інтергармонік на значення параметрів електроенергії та складність їх розрахунку через невизначеність і постійну зміну періоду інтегрування, що зумовлюють низьку ефективність використання чисельних методів аналізу інтергармонік та ускладнюють синтез законів модуляції напруги при врахуванні інтергармонік. Доведено, що аналітичні методи розрахунку на основі ряду та перетворення Фур'є через жорстку прив'язку до періода інтегрування є неефективними і потребують перерахунку спектра при зміні параметрів модуляції.

2. Запропоновано представлення модульованих сигналів у просторі декількох незалежних змінних і формування узагальнених спектральних характеристик сигналу в M -вимірному просторі з використанням узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

3. Показано, що спектральні компоненти ряду Фур'є двох змінних розширюються на довільну кількість змінних, що дозволяє спростити використання розробленого математичного апарату при описі багатопараметричних модульованих сигналів.

4. Розроблений алгоритм швидкого перетворення Фур'є для декількох змінних, трудомісткість якого еквівалентна трудомісткості алгоритму у просторі однієї змінної, дозволяє значно пришвидшити чисельний розрахунок спектральних компонент модульованих сигналів зі складними законами модуляції.

5. Показано, що метод розрахунку спектра модульованих сигналів зі змінною частотою носійної функції дозволяє використовувати узагальнений ряд Фур'є для адаптивних методів модуляції, зокрема для частотно-імпульсної та програмної модуляції.

6. Розроблено принцип керування за значенням параметрів якості електроенергії, представлених у згорнутому параметричному виді, що дозволяє на декілька порядків зменшити обсяг математичних операцій та дає можливість реалізувати принцип регулювання значень параметрів якості електроенергії у системах керування напівпровідниковими перетворювачами у реальному масштабі часу.

7. Розроблений принцип керування однофазним інвертором за значенням коефіцієнта гармонік підтвердив зменшення обсягу математичних операцій мінімум на два порядки при похибці розрахунків не вище 1 %, зменшення на порядок обсягу динамічних втрат завдяки зменшенню значення параметра кратності модуляції при максимальних навантаженнях, що підтверджено моделюванням у середовищі MatLab Simulink®.

8. Запропоновано використовувати метод модуляції ЧІМ з інвертуванням полярності кожного другого імпульсу, описаний в базисі ряду Фур'є двох змінних, та доведено зменшення масогабаритних параметрів перетворювача із забезпеченням необхідного значення коефіцієнта гармонік вихідної напруги при глибині модуляції, що перевищує значення 0.85 при рівності мас трансформатора та фільтра, та зменшення масогабаритних показників перетворювача у всьому діапазоні значень глибини модуляції максимум втричі, при співвідношенні мас трансформатора та фільтра у пропорції 4:1.

9. Уперше розраховано рівень інтергармонічних спотворень при живленні регульованого електропривода асинхронного двигуна, та показано що значення коефіцієнта низькочастотних гармонічних спотворень має мінімальне значення $0.024/\mu$, з глибиною модуляції μ , у режимі зі значенням кратності модуляції кратному числу 3, а максимальне значення – $0.069/\mu$ у режимах з інтергармоніками.

10. Розроблено метод зменшення інтергармонічних складових у трифазному інверторі регульованого електропривода, обчислювальна складність якого дозволяє реалізувати його у контурі системи керування, що працює у реальному масштабі часу та дозволяє знизити рівень інтергармонічних спотворень на порядок при зменшенні коефіцієнта нелінійних інтергармонічних спотворень з 4.6 % до 2.9 %.

11. На основі узагальненого ряду Фур'є розроблено методику розрахунку кількості комірок модульного зарядного пристрою з використанням розрахункових співвідношень параметрів якості електроенергії. Проведена практична перевірка підтвердила теоретично отримані значення коефіцієнта потужності – не менше 0.99, коефіцієнта нелінійних спотворень – не більше 0.1 при коефіцієнті корисної дії не менше 0.92.

12. Запропонований метод розрахунку спектра має складність $O(N)$ нарівні з вейвлет перетворенням, що є теоретичною нижньою межею складності розрахунку спектра, однак на відміну від вейвлет перетворення запропонований метод дозволяє розраховувати значення окремих гармонік зі складністю $O(N^{1/M})$ та параметрів якості зі складністю $O(1)$ відповідно, що свідчить про його ефективність використання у системах керування, що синтезують закони керування у реальному масштабі часу та забезпечують покращення параметрів якості приблизно в 2 рази.

13. Отримані наукові результати використані для розробки експериментального зразка модульного зарядного пристрою в рамках проекту «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People».

14. Наукові результати впроваджено в учбовий процес – дисципліни «Теорія інформації та обробка сигналів», «Пристрої перетворювальної техніки», «Системи електроживлення електронної апаратури».

15. Розроблені методи та методики використано для створення програмного забезпечення систем керування однофазним інвертором та модульним зарядним пристроєм.

16. Адаптивні принципи модуляції було використано для узгодження режимів роботи декількох паралельно під'єднаних джерел енергії при розробці двох патентів: патент на винахід № 108127 "Спосіб формування синусоїдальної напруги на основі перетворювача з амплітудно-широотно-імпульсною модуляцією та пристрій для його реалізації" [4], патент на винахід № 118584 «Пристрій компенсації реактивної потужності у перехідних і усталених режимах» [83].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Моделювання систем з перетворювачами електроенергії з циклічно-змінюваними параметрами / Жуйков В.Я., Денисюк С.П., Мельничук Г.В. – К.: ТОВ «Наш формат», 2018. – 165 с.
2. Ромашко В.Я. До питання про відбір максимальної потужності від джерел електричної енергії // Електроніка и связь. – 2013. – № 4. – С. 28 – 34.
3. Основы современной энергетики: учебник для вузов: в 2 т. / под ред. В. Аметистова. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008.
4. Патент на винахід № 108127, чинний з 25.03.2015, опубл. 25.03.2015 бюл. № 6, "Спосіб формування синусоїдальної напруги на основі перетворювача з амплітудно-широотно-імпульсною модуляцією та пристрій для його реалізації". Жуйков В.Я., Вербицкий Є.В., Осипенко К.С.
5. Жуйков В.Я. Формирование синусоидального напряжения разнотипными источниками энергии / Жуйков В.Я., Вербицкий Е.В., Осипенко К.С. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2013, № 8(114), Т.2, с. 104-107.
6. Вербицкий Є.В., Кисельова А. Г., Осипенко К. С. Контекстно-залежне керування автономними системами електроживлення: під загальною редакцією д.т.н. Жуйкова В.Я. – К.: Аверс, 2015. – 187 с.
7. Вербицкий Є.В. Особливості пошуку точки максимальної потужності сонячної батареї методами холостого ходу і короткого замикання // Вербицкий Є.В., Ромашко В.Я. Електроніка і зв'язок. – 2013. № 5, с. 13-18.
8. Вербицкий Е.В. Использование контекстных данных при управлении распределенной сетью электропитания / Е.В. Вербицкий, А.Г. Киселева // Технічна електродинаміка – 2016, № 1, с. 55-59.
9. Context-aware framework for energy management system. A. G. Kyselova; I. V. Verbitskyi; G. D. Kyselov. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, P. 1-4. DOI: 10.1109/IEPS.2016.7521890.
10. Ievgen Verbytskyi; Anna Kyselova; Gennadiy Kyselov. Power grid converter control improvement based on contextual data. 2017 IEEE First Ukraine Conference on

Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, Pp. 599-604.
DOI: 10.1109/UKRCON.2017.8100311.

11. Руденко В.С., Жуйков В.Я., Коротеев И.Е. Расчет устройств преобразовательной техники.-К.:Техніка, 1980.-135с.

12. Вентильные преобразователи переменной структуры / Тонкаль В.Е., Руденко В.С., Жуйков В.Я. и др.; Отв. Ред. Шидловский А.К.; АН УССР. Ин-т электродинамики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

13. Браун. М. Источники питания. Расчет и конструирование.: Пер. с англ. – К.: «МК-Пресс», 2007. – 288 с., ил.

14. В.И. Мелешин. Транзисторная преобразовательная техника. Москва: Техносфера, 2005. – 632 с.

15. Tzafestas, S.G.. Multidimensional Systems: Techniques and Applications. New York: Marcel-Dekker, 1986.

16. Sargent, R. W. H. Optimal Control. Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000, Vol. 124 (1–2). – Pp. 361–371. doi:10.1016/S0377-0427(00)00418-0.

17. Kaisa Miettinen . Nonlinear Multiobjective Optimization. Springer, 1999. ISBN 978-0-7923-8278-2.

18. Рогаль В.В. Способи покращення спектру вхідного струму коректора коефіцієнта потужності / В.В. Рогаль, Ю.С. Демченко // Технічна електродинаміка. – 2015. – №6. – С. 29 – 33.

19. L. Huber and D. Borojevic, “Space vector modulated three phase to three phase Matrix Converter with input power factor correction,” IEEE Trans. Ind. Applicat., vol. 31, no. 6, pp. 1234-1246, November/December 1995.

20. Denisov, Y. O., Stepenko, S. A., Gorodny, A. N., Kravchenko, A. O. Input current parameters analysis for PFC based on quasi-resonant and conventional boost converters. In 2014 IEEE 34th International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), 2014, pp. 393-397.

21. Денисов, А. И., Бурсала, А. Л., Бурсала, Е. А., Шаповалов, О. Л., & Башинский, К. В. Контур тока для системы запуска газотурбинного двигателя

вертолета с бесколлекторной электромашиной постоянного тока. Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України, 2017, № 4, 26-34.

22. Денисов, А. И.; Ревко, А. С. Квазирезонансные импульсные преобразователи в системах прецизионного электропривода малой мощности. Технічна електродинаміка. Тем. вип. „Проблеми сучасної електротехніки”.–2004.–Ч, 2: 79-82.

23. A. Newton, T.C. Green, D. Andrew. AC/DC power factor correction using interleaved boost and Cuk converters. 8th International Conference on Power Electronics and Variable Speed Drives, 2000 p. 293 – 298.

24. Характеристики напруги електропостачання в електричних мережах загальної призначеності: ДСТУ EN 50160:2014 (EN 50160:2010, IDT). [Чинний з 1.10.2014]. – К.: Держстандарт України, 2014. – 27 с.

25. IEC 6100-4-7 Electromagnetic compatibility (EMC) Part 4-7: Testing and measurement techniques – General guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto.

26. IEC 61000-4-30 Electromagnetic compatibility. Testing and measurement techniques – Current quality measurement methods.

27. Системы упреждающего управления вентиляемыми преобразователями / Жуйков В.Я., Павлов В.Б., Стжелецки Р.Г., отв. редактор Федий В.С.: АН Украины. Ин-т электродинамики. – Киев: Наук. думка, 1991. – 240 с.

28. Перетворювальна техніка. Частина 1: Підручник. / В.С. Руденко, В.Я. Ромашко, В.Г. Морозов. – К.: ІСДО, 1996. – 262 с.

29. Chang, G. W., & Chen, S. K. An Analytical Approach for Characterizing Harmonic and Interharmonic Currents Generated by VSI-Fed Adjustable Speed Drives. IEEE Transactions on Power Delivery, 2005, 20(4), 2585–2593. doi:10.1109/tpwrd.2005.855487.

30. Баланс энергий в электрических цепях. Тонкаль В.Е., Новосельцев А.В., Денисюк С.П. и др.; Отв. Ред. Волков И.В.; АН Украины. Ин-т пробл. Энергосбережения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 312 с.

31. Ромашко В.Я. Аналіз втрат енергії в системі відбору максимальної потужності сонячної батареї. // Ромашко В.Я., Вербицький Є.В., Киричек Є.І. Технічна електродинаміка – 2014, № 4, с. 55-57.
32. Gallo D. On the processing of harmonics and interharmonics in electrical power systems / D. Gallo, R. Langella, A. Testa // IEEE Transactions on Power Engineering Society Winter Meeting. – 2000. – Vol. 3, p. 1581-1586.
33. EN 50160, Voltage characteristics of electricity supplied by public distribution systems, 1994.
34. Interharmonics in power systems / IEEE Interharmonics Task Force, Cigre 36.05/ CIRED 2 CC02 Voltage Quality Working Group. – 1997 – p. 1-9.
35. Hanzelka Z.: Bień A.: Harmonics, Interharmonics. (Power Quality Application Guide, 2004).
36. Zhuikov V.Y. Особливості компенсації миттєвої реактивної потужності в лінійних ланцюгах у перехідному режимі при вмиканні навантаження / V.Y. Zhuikov, I.V. Verbytskyi, O.F. Bondarenko // Електроніка та зв'язок – 2017, № 22 (4), с. 30-37. DOI: 10.20535/2312-1807.2017.22.4.105271.
37. Zhuikov, V.J., Verbytskyi, I.V., Kyselova, A.G. Reactive power compensation approach with dynamic mode of load current. Technical Electrodynamics – 2018, № 4, Pp. 47-52. doi: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.047>.
38. Основы теории колебаний. Мигулин В.В, Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. - М.: Наука, 1978.
39. Testa, A., Akram, M. F., Burch, R., Carpinelli, G., Chang, G., Dinavahi, V., ... & Lehn, P. Interharmonics: Theory and modeling. IEEE Transactions on Power Delivery. – 2007, № 22(4), pp. 2335-2348.
40. Feng Zhou, Zhenyu Huang, Chunyu Zhao, Xiangmin Wei, & Dayue Chen. Time-Domain Quasi-Synchronous Sampling Algorithm for Harmonic Analysis Based on Newton's Interpolation. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011, 60(8), 2804–2812. doi:10.1109/tim.2011.2118890.

41. Jain, S. K., & Singh, S. N. Harmonics estimation in emerging power system: Key issues and challenges. *Electric Power Systems Research*, 2011, 81(9), 1754–1766. doi:10.1016/j.epsr.2011.05.004.
42. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989. — 496 с.
43. Harris, Fredric J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 1978, Vol. 66(1), p. 51-83.
44. Дьяконов, В. П. Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. — М.: СОЛОН-Пресс, 2010. — 400 с.
45. Dash, P.K. Power quality analysis using S-transform / P. K. Dash, B. K. Panigrahi, G. Panda // *IEEE Transactions on Power Delivery*. — 2003. — vol. 18, issue 2. — pp. 406-411. DOI: 10.1109/TPWRD.2003.809616
46. Mishra, S. Detection and classification of power quality disturbances using S-Transform and probabilistic neural network / S. Mishra, C. N. Bhende, B. K. Panigrahi // *IEEE Transactions on Power Delivery*. — 2008. — vol. 23, issue 1. — pp. 280-287. DOI: 10.1109/TPWRD.2007.911125
47. Zhao, F. Power-quality disturbance recognition using S-transform / F. Zhao, R. Yang // *IEEE Transactions on Power Delivery*. — 2007. — vol. 22, issue 2. — pp. 944-950. DOI: 10.1109/TPWRD.2006.881575.
48. Walters, Peter. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1982, 250 p.
49. Жежеленко И. В. Вероятностный подход к анализу интергармоник в системах электроснабжения промышленных предприятий / И. В. Жежеленко, Ю. Л. Саенко, Т. К. Бараненко // IV Міжнародна наукова конференція “Ефективність і якість електропостачання промислових підприємств”: Збірник праць. — Маріуполь, 2000. — С. 33-36.
50. Применение спектрально-корреляционной теории случайных процессов для оценки потерь при наличии высших гармоник и интергармоник / Ю. Л. Саенко, Т. К. Бараненко, И. Ю. Саенко // *Електрифікація трансп.* - 2017. - Вип. 13. - С. 129-133.

51. Елизаров, Д.А. Совершенствование алгоритма определения параметров гармоник сигналов в электрической сети для оценки качества электроэнергии / Е.А. Альтман, Д.А. Елизаров, С.Н. Чижма // Электротехнические комплексы и системы управления. Воронеж, 2012. № 4(28). С. 5-9.
52. F. Lliccardo, P. Marino, and G. Raimondo. Robust and fast three-phase PLL tracking system. IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 58, no. 1, pp. 221– 231, Jan. 2011.
53. T. Thacker, D. Boroyevich, R. Burgos, and F. Wang. Phase-locked loop noise reduction via phase detector implementation for single-phase systems. IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 58, no. 6, pp. 2482–2490, Jun. 2011.
54. L. Rabiner, R. Schafer, C. Rader, The chirp z-transform algorithm, IEEE Trans. Audio Electroacoust. 17,1969, pp. 86-92.
55. M. Aiello, A. Cataliotti, V. Cosentino, S. Nuccio, Synchronization techniques for power quality instruments, IEEE Trans. Instrum. Meas., 2007, Vol. 56, pp. 1511-1519.
56. Брыжин А. А., Верстаков Е. В., Захарченко В. Д. Потенциальная точность оценки параметров сигналов методом Прони // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2008. Т.11, №1. – С.6-10.
57. A new method based on artificial neural network, wavelet transform and short time Fourier transform for subsynchronous resonance detection / Y. Xia [et al.] // International journal of electric power and energy systems. – 2018. – vol. 103, December. – pp. 377-383. doi: 10.1016/j.ijepes.2018.06.019.
58. Abdelgayed, T. S. A New approach for fault classification in microgrids using optimal wavelet functions matching pursuit / T. S. Abdelgayed, W. G. Morsi, T. S. Sidhu // IEEE Transactions on Smart Grid. . – 2018. – vol. 9, issue 5. – pp. 4838-4846. DOI: 10.1109/tsg.2017.2672881.
59. N.E. Huang, N.O. Attoh-Okine, The Hilbert-Huang transform in engineering, Taylor & Francis, 2005, 328 p. DOI: 10.1201/9781420027532.
60. A.N. Akansu and Y. Liu, On Signal Decomposition Techniques, (Invited Paper), Optical Engineering Journal, special issue Visual Communications and Image Processing, vol.30, pp. 912-920, July 1991.

61. Development of conductive parts power losses calculation method in case of interharmonics / D. S. Osipov [et al.] // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2017. – NR 6. pp. 146-149. DOI: 10.15199/48.2017.06.33.
62. Proakis, John G.; Manolakis, Dimitri G. (1996), *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications* (3 ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996, 968 p.
63. Zygmund, Antoni. *Trigonometric Series* (2nd ed.), Cambridge University Press, 1988, ISBN 978-0-521-35885-9.
64. Дороговцев А. Я. Математический анализ. — Київ, Вища школа, 1985.
65. Applications of wavelet transform for analysis of electrical transients in power systems: The Review / D. S. Osipov [et al.] // *Przegląd Elektrotechniczny*. – 2016. – NR 4. pp. 162-165. DOI:10.15199/48.2016.04.35.
66. C.-I Chen, “A calibration test platform of power quality instruments for grid integration of wind energy system,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 7, pp. 2874–2880, Jul. 2013.
67. R. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE Trans. Antennas Propag.* 34, 1986, 276-280.
68. S. K. Jain and S. N. Singh. Exact model order ESPRIT technique for harmonics and interharmonics estimation. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 7, pp. 1915–1923, Jul. 2012.
69. Tripathy, P., Srivastava, S. C., & Singh, S. N. A Modified TLS-ESPRIT-Based Method for Low-Frequency Mode Identification in Power Systems Utilizing Synchrophasor Measurements. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011, 26(2), pp. 719–727. doi:10.1109/tpwrs.2010.2055901.
70. G.E.P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, *Time series analysis: Forecasting and control*, 3rd ed., Prentice-Hall International, 1994, 712 p.
71. G.W. Chang and C.-I Chen. An accurate time-domain procedure for harmonics and interharmonics detection. *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 25, no. 3, pp. 1787–1795, Jul. 2010.

72. C.-I. Chen. A calibration test platform of power quality instruments for grid integration of wind energy system. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 7, pp. 2874–2880, Jul. 2013.
73. Z. Leonowicz, T. Lobos, and J. Rezmer. Advanced spectrum estimation methods for signal analysis in power electronics. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 50, no. 3, pp. 514–519, Jun. 2003.
74. H. Xue and P. Zhang. Subspace-least mean square method for accurate harmonic and interharmonic measurement in power systems. *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 27, no. 3, pp. 1260–1267, Jul. 2012.
75. T.T. Nguyen, Parametric harmonic analysis, in: *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.* 144, 1997, pp. 21–25.
76. C.-I. Chen, G.W. Chang, R. C. Hong, and H. M. Li. Extended real model of Kalman filter for time-varying harmonics estimation. *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 25, no. 1, pp. 17–26, Jan. 2010.
77. K. H. Kwan, P. L. So, and Y. C. Chu. An output regulation-based unified power quality conditioner with Kalman filters. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 11, pp. 4248–4262, Nov. 2012.
78. G. W. Chang, C.-I. Chen, and Y. F. Teng. Radial-basis-function-based neural network for harmonic detection. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 6, pp. 2171–2179, Jun. 2010.
79. H. C. Lin. Intelligent neural network-based fast power system harmonic detection. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 54, no. 1, pp. 43–52, Feb. 2007.
80. P. K. Dash, D. P. Swain, A. C. Liew, and S. Rahman. An adaptive linear combiner for on-line tracking of power system harmonics. *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 1730–1735, Nov. 1996.
81. P. K. Dash, D. P. Swain, A. Routray, and A. C. Liew. Harmonic estimation in a power system using adaptive perceptrons. *Proc. Inst. Elect. Eng.—Gener., Transmiss., Distrib.*, vol. 143, no. 6, pp. 565–574, Nov. 1996.
82. Вербицький, Є. В. Аналіз параметрів якості електроенергії при встановленні компенсаторів реактивної потужності / Є. В. Вербицький, К. А.

Ходаков // Вісник НТУ «ХП», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХП». – 2018. – 45 (1321). – С. 234-242. – doi:10.20998/2413-4295.2018.45.32.

83. Вербицький, Є. В. Компенсатор реактивної потужності у перехідних режимах / Є. В. Вербицький, Р. М. Прибудько, Д. О. Зінченко, М. О. Мацюк // Вісник НТУ «ХП», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХП». – 2018. – № 26 (1302). – Т. 2. – С. 121-125. – doi:10.20998/2413-4295.2018.26.42.

84. Пристрій компенсації реактивної потужності у перехідних і усталених режимах. Жуйков В.Я., Вербицький Є.В. Патент на винахід № 118584, чинний з 11.02.2019, опубл. 11.02.2019, Бюл.№ 3.

85. Баскаков С. И., Радиотехнические цепи и сигналы, М., 1983.

86. Математические основы теории автоматического регулирования, т. II. Изд. 2-е, доп. Под ред. Б.К. Чемоданова. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1977, 455 с.

87. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. (2003), “Pulse width modulation for power converters. Theory and practice”. IEEE Press Series on Power Engineering, 724 p.

88. F. Vasca, L. Iannelli. Dynamics and Control of Switched Electronic Systems: Advanced Perspectives for Modeling, Simulation and Control of Power Converters (Advances in Industrial Control). Springer-Verlag London, 2012. – 493 p.

89. Сетюков Л.И. Применение двойных рядов Фурье для определения частотных спектров различных видов импульсной модуляции, Тр. МЭИ. Радиотехника и электроника. – 1961, с. 24-35.

90. Korotyeyev I., Klytta M., Process analysis in single-phase half-bridge inverter based on extension of differential equations, Energoseberezhenie. Energetika. Energoaudit. - 2013, Vol. 1, №. 8, pp. 58-63.

91. Korotyeyev I., Klytta M. Analyse of Steady-State Process in Circuits with Incommensurable Frequencies of Voltage Sources, 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems - IEPS 2016. Kyiv, Ukraine, 2016, pp. 10-13.

92. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С., Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука. 1976. — 541 с.
93. Буденный А.В., Колодяжный А.В., Смирнов А.Н. Оптимизация выходных фильтров преобразователей с ШИМ и АШИМ // Техническая электродинамика, тематический выпуск «Силовая электроника и энергоэффективность», Ч.3. - 2006, с. 13-18.
94. Буденный А.В., Колодяжный А.В. Применение двойных рядов Фурье для исследования гармонического состава ШИМ сигналов // Техническая электродинамика, тематический выпуск «Проблемы современной электроники», Ч.5. – 2006, с. 65-68.
95. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е изд.: пер. с англ. –М.: Изд.дом «Вильямс», 2004. -992 с.
96. Інтелектуальні системи керування потоками електроенергії у локальних об'єктах. Кириленко О.В., Петергеря Ю.С., Терещенко Т.О., Жуйков В.Я. К.: Медіа ПРЕС. 2005.
97. Дискретные спектральные преобразования на конечных интервалах. Жуйков В.Я., Терещенко Т.А., Петергеря Ю.С. К.: НТУУ «КПИ». 2010.
98. Ю.С Петергеря. Інтелектуальні системи забезпечення енергозбереження житлових будинків. // Ю.С Петергеря, В.Я. Жуйков, Т.С. Терещенко / Навчальний посібник. – К.: Медіа-ПРЕС, 2008. – 256 с. ISBN 966-8934-08-3.
99. Smith, W. Handbook of Real-Time Fast Fourier Transforms: Algorithms to Product Testing, Wiley_ IEEE Press, edition 1, pages 73–80, 1995.
100. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов, “Кратные ряды и интегралы Фурье”, Коммутативный гармонический анализ – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 42, ВИНТИ, М., 1989, с. 7–104.
101. Bracewell, R. The Fourier Transform and Its Applications McGraw-Hills, 1986, 474 p.
102. Воробьев Н.Н. Теория рядов. Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 408 с.

103. Bondarenko, O., Verbytskyi, I., Prokopets, V., Kaloshyn, O., Spitsyn, D., Ryzhakova, T., Kozhushko, Y. Modular Power Supply for Micro Resistance Welding. *Electrical, Control and Communication Engineering*, 12(1), 2017, Pp. 20-26. doi: 10.1515/ecce-2017-0003.
104. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Dmitri Vinnikov. Multicell-type current regulator based on Cuk converter for resistance welding. 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON), Riga, 2017, Pp. 1 – 6. doi: 10.1109/RTUCON.2017.8124844.
105. Diab, M. S., Elserougi, A., Massoud, A. M., Abdel-Khalik, A. S., & Ahmed, S. A Four-Switch Three-Phase SEPIC-Based Inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2015, 30(9), pp. 4891–4905. doi:10.1109/tpel.2014.2363853.
106. Batschauer, A. L., Mussa, S. A., & Heldwein, M. L. Three-Phase Hybrid Multilevel Inverter Based on Half-Bridge Modules. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(2), pp. 668–678. doi:10.1109/tie.2011.2158039.
107. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. – 392 с.
108. Чаплыгин, Е.Е. Спектральное моделирование преобразователей с широтно-импульсной модуляцией [Текст]: учебное пособие по курсу "Моделирование электронных устройств и систем" для студентов, обучающихся по специальности "Промышленная электроника" / Е. Е. Чаплыгин ; М-во образования и науки Российской Федерации, Нац. исслед. ун-т "МЭИ". - Москва : Издательский дом МЭИ, 2012. - 48 с.
109. J. Lai, F. Peng, "Multilevel converters - a new breed of power converters," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 32, no. 3, pp. 509-517, May/Jun.1996. doi: 10.1109/28.502161.
110. J. Rodriguez, L.G. Franquelo, S. Kouro, J.I. Leon, R. Portillo, M.A.M. Prats, M.A. Perez, "Multilevel Converters: An Enabling Technology for High-Power Applications", *Proc. of IEEE*, vol. 97, no.11, pp. 1786-1817, Nov. 2009. doi: 10.1109/JPROC.2009.2030235.

111. Бейтмен Г., Эрдейи А. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены // Высшие трансцендентные функции. Т. 2. 2-е изд / Пер. с англ. Н. Я. Виленкина. — М.: Наука, 1974. — 296 с.
112. NIELSEN, Karsten. A review and comparison of pulse-width modulation (PWM) methods for analog and digital input switching power amplifiers. In: Audio Engineering Society Convention 102. Audio Engineering Society, 1997.
113. Lopez, Ó., Alvarez, J., Doval-Gandoy, J., & Freijedo, F. D. Multilevel Multiphase Space Vector PWM Algorithm. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2008 55(5), pp. 1933–1942. doi:10.1109/tie.2008.918466.
114. Houldsworth, J. A., & Grant, D. A. The Use of Harmonic Distortion to Increase the Output Voltage of a Three-Phase PWM Inverter. IEEE Transactions on Industry Applications, 1984, IA-20(5), 1224–1228. doi:10.1109/tia.1984.4504587.
115. Чаплыгин Е.Е., Обухов С.Г., Кондратьев Д.Е. Широтно-импульсная модуляция в трехфазных инверторах напряжения / Электричество, № 7, 2008.
116. Калачев, Ю. Н. Векторное регулирование. Заметки практика: учебное пособие/ЮА Калачев—М.: ОФА—2013.—73 с.
117. Pou, J., Zaragoza, J., Ceballos, S., Saeedifard, M., & Boroyevich, D. A Carrier-Based PWM Strategy With Zero-Sequence Voltage Injection for a Three-Level Neutral-Point-Clamped Converter. IEEE Transactions on Power Electronics, 2012, Vol. 27(2), p. 642–651. doi:10.1109/tpel.2010.2050783.
118. Buso, S., & Mattavelli, P. Digital Control in Power Electronics. Synthesis Lectures on Power Electronics, 2006, 158 p. doi:10.2200/s00047ed1v01y200609pel002.
119. Bojoi, R., Lazzari, M., Profumo, F., & Tenconi, A. (n.d.). Digital field oriented control for dual three-phase induction motor drives. Conference Record of the 2002 IEEE Industry Applications Conference. 37th IAS Annual Meeting.
120. Watson, G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions (2nd.ed.) // G.N. Watson // Cambridge University Press, 1966, 798 p.
121. Вербицкий, С. В. Швидке перетворення Фур'є модульованих сигналів, представлених рядом Фур'є двох змінних / С. В. Вербицкий // Вісник НТУ «ХП»,

Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 16 (1292). – С. 102-106. – doi:10.20998/2413-4295.2018.16.15.

122. Duhamel, Pierre; Vetterli, Martin (1990). "Fast Fourier transforms: a tutorial review and a state of the art". *Signal Processing*. 19 (4): 259–299. doi:10.1016/0165-1684(90)90158-U.

123. Nussbaumer, Henri J. "Digital filtering using polynomial transforms". *Electronics Letters*. – 1997, 13 (13): 386–387. doi:10.1049/el:19770280.

124. Mou, Z.-J., & Duhamel, P. In-place butterfly-style FFT of 2-D real sequences. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(10), pp. 1642–1650. doi:10.1109/29.7552.

125. Frigo, Matteo; Johnson, Steven G. The Design and Implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*. 93 (2), 2005, pp. 216–231. doi:10.1109/jproc.2004.840301.

126. Бурман А.П. Управление потоками электроэнергии и повышение эффективности электроэнергетических систем: учебное пособие / А.П. Бурман, Ю.К. Розанов, Ю.Г. Шакарян. – М.: Издательский дом МЭИ, 2012. – 336 с.

127. Kazmierkowski M.P., Krishnan R., Blaabjerg E.B. *Control in Power Electronics. Selected Problems*. – USA: Academic Press, 2002.

128. Артеменко М.Ю., Батрак Л.М., Поліщук С.Й. Фільтрація струмів в трифазній трипровідній системі електроживлення при несиметричних синусоїдних напругах. / *Електротехніка і електромеханіка*. № 2 2018, с. 63-68. doi: 10.20998/2074-272X.2018.2.11

129. M. Yu. Artemenko, L. M. Batrak, S. Y. Polishchuk Apparent power and efficiency of three-phase four-wire system / *Microsystems, Electronics and Acoustics*, 2018, vol. 23, no. 3 p. 14-19. doi: 10.20535/2523-4455.2018.23.3.133312.

130. Crowhurst, B., El-Saadany, E. F., Chaar, L. E., & Lamont, L. A. Single-phase grid-tie inverter control using DQ transform for active and reactive load power compensation. 2010 IEEE International Conference on Power and Energy. doi:10.1109/pecon.2010.5697632.

131. G.-H. Choe and M.-H. Park, "A new injection method for AC harmonic elimination by active power filter," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 35, no. 1, pp. 141–147, 1988.
132. T. Kamath, N. Mohan, and D. Alerron, "Hardware implementation of a novel reduced rating active filter for 3-phase 4-wire loads," in *Proc. APEC '95*, vol. 1, 1995, pp. 984–989.
133. S. Fukuda and S.I. Sugawa, "Adaptive signal PWM caring based control of active power filter," in *Proc. IAS'96*, vol. 1, 1996, pp. 886–890.
134. Asiminoael, L., Blaabjerg, F., & Hansen, S. Detection is key - Harmonic detection methods for active power filter applications. *IEEE Industry Applications Magazine*, vol. 13(4), 2007, p. 22–33. doi:10.1109/mia.2007.4283506.
135. Bing, Z., & Sun, J. Frequency-Domain Modeling of Multipulse Converters by Double-Fourier Series Method. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2011, 26(12), pp. 3804–3809. doi:10.1109/tpel.2011.2105504.
136. Verbytskyi Ievgen. Spectrum calculation of frequency pulse modulation voltage using double Fourier series. Conference IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering, Riga, 2015, P. 1-4. doi:10.1109/AIEEE.2015.7367287.
137. Liu, X., Guo, S., Wang, S., Xu, F., Du, G., & Chang, Y. Analysis and Design of a High Efficiency Boost DC-DC Converter Based on Pulse-Frequency Modulation. 2007 International Symposium on Integrated Circuits. doi:10.1109/isicir.2007.4441882.
138. Bracewell, Ronald Newbold; Bracewell, Ronald N. The Fourier transform and its applications. New York: McGraw-Hill, 1986, 388 p.
139. Тонкаль, В. Е., Гречко Э. Н., Кулешов Ю. Е.. Оптимальный синтез автономных инверторов с амплитудно-импульсной модуляцией. Киев: Наукова Думка, 1987.
140. Ушаков Д.Р. Анализ методов формирования квазисинусоидальных напряжений с минимизацией коэффициента гармонических искажений / Д.Р. Ушаков, Е.В. Вербицкий // Збірник "Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України" - 2016, вип. 43, с. 102-106.

141. Ievgen Verbytskyi. A double fourier series implementation for modulated signal with the arbitrary modulation. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, Pp. 518-521. doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100295.
142. Перехідні процеси: навч. посіб. / В.Я. Жуйков, В.Я. Ромашко. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 184 с.
143. Демирчян К.С. Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1988. – 335 с.
144. Ромашко В.Я. Дискретно-лінійні електричні ланцюги. Теорія та розрахунок. – К.: Аверс, 2005. – 175 с.
145. Вербицький Є.В. Особливості розрахунку спектру напруги, модульованої по закону ШІМ І і ІІ на основі подвійного ряду Фур'є. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 5, с. 36-45.
146. Татаринов В.Н., Татаринов С.В. Спектры и анализ. Учебное пособие. – 2-е издание, стереотипное. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 324 с.
147. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 149–157.
148. Вербицький Є.В. Визначення кратності ШІМ напруги інвертора за значенням коефіцієнта гармонік на основі подвійного ряду Фур'є. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 4, с. 21-28.
149. Вербицький Є.В. Розрахунок інтегральних показників модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є. // Вербицький Є.В., Гонтарєв Д.О., Путілін М.В. Електроніка і зв'язок. – 2014. № 6, с. 52-57.
150. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Пер с англ. под. ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. М. Наука, 1979, 832 с.
151. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть I. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. - 798 с.

152. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Физматгиз., 1963 г., 1100 с.
153. T. Boutot and L. Chang. Development of a single-phase inverter for small wind turbines, in Proc. IEEE Electrical and Computer Engineering Canadian Conf. (CCECE'98), Waterloo, ON, Canada, May 24–28, 1998, pp. 305–308.
154. R. O. Cáceres and I. Barbi. A boost dc-ac converter: analysis, design, and experimentation, IEEE Trans. Power Electron., vol. 14, pp. 134–141, Jan. 1999.
155. N. Vázquez, J. Almazan, J. Álvarez, C. Aguilar, and J. Arau. Analysis and experimental study of the buck, boost and buck-boost inverters, in Proc. IEEE PESC'99, Charleston, SC, June 27–July 1 1999, pp. 801–806.
156. M. Kusakawa, H. Nagayoshi, K. Kamisako, and K. Kurokawa. Further improvement of a transformerless, voltage-boosting inverter for ac modules, Solar Energy Mater. Solar Cells, vol. 67, pp. 379–387, Mar. 2001.
157. N. Kasa, T. Iida, and H. Iwamoto. An inverter using buck-boost type chopper circuits for popular small-scale photovoltaic power system, in Proc. IEEE IECON'99, San Jose, CA, Nov./Dec. 1999, pp. 185–190.
158. M. Nagao and K. Harada. Power flow of photovoltaic system using buck-boost PWM power inverter, in Proc. IEEE PEDS'97, Singapore, May 26–29, 1997, pp. 144–149.
159. M. Kusakawa, H. Nagayoshi, K. Kamisako, and K. Kurokawa. Further improvement of a transformerless, voltage-boosting inverter for ac modules, Solar Energy Mater. Solar Cells, vol. 67, pp. 379–387, Mar. 2001.
160. J. M. A. Myrzik. Novel inverter topologies for single-phase stand-alone or grid-connected photovoltaic systems, in Proc. IEEE PEDS'01, Oct. 22–25, 2001, pp. 103–108.
161. Z. Yang and P. C. Sen. A novel switch-mode dc-to-ac inverter with nonlinear robust control, IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 45, pp. 602–608, Aug. 1998.
162. S. Saha and V. P. Sundarsingh. Novel grid-connected photovoltaic inverter, Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 143, pp. 219–224, Mar. 1996.

163. F.-S. Kang, C.-U. Kim, S.-J. Park, and H.-W. Park. Interface circuit for photovoltaic system based on buck-boost current-source PWM inverter, in Proc. IEEE IECON'02, Seville, Spain, Nov. 5–8, 2002, pp. 3257–3261.
164. K. Chomsuwan, P. Prisuwana, and V. Monyakul. Photovoltaic grid-connected inverter using two-switch buck-boost converter, in Proc. 29th IEEE Photovoltaic Specialists Conf., New Orleans, LA, May 19–24, 2002, pp. 1527–1530.
165. Перетворювальна техніка. Підручник Ч.2 / Ю.П. Гончаров, О.В. Будьонний, В.Г. Морозов, М.В. Панасенко, В.Я. Ромашко, В.С. Руденко. За ред. В.С. Руденка. – Харків: Фоліо, 2000. – 360 с.
166. А. Захаров. Расчет выходного фильтра ШИМ-инвертора. Силовая электроника, 2005, № 1, с. 48-50.
167. М.Я. Выгодский. Справочник по высшей математике. М., 1973, 872 с.
168. Путілін М.В. Зменшення динамічних втрат у інверторах квазісинусоїдальної напруги за допомогою регулювання кратності модуляції вихідної напруги. // Путілін М.В., Вербицький Є.В. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 3, с. 51-55.
169. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. Материалы к первому всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933. – с. 1-19.
170. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. — М. : Мир, 1985. - 264 с.
171. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB. Учебный курс. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.
172. Nasiri, A., Nie, Z., Bekiarov, S. B., & Emadi, A. An On-Line UPS System With Power Factor Correction and Electric Isolation Using BIFRED Converter. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2008, 55(2), 722–730. doi:10.1109/tie.2007.911199.
173. Kawabata, T., Honjo, K., Sashida, N., Sanada, K., & Koyama, M. (n.d.). High frequency link DC/AC converter with PWM cycloconverter. Conference Record of

the 1990 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting. doi:10.1109/ias.1990.152325.

174. Koutroulis, E., Chatzakis, J., Kalaitzakis, K., & Voulgaris, N. C. A bidirectional, sinusoidal, high-frequency inverter design. IEE Proceedings - Electric Power Applications, 2001, 148(4), 315. doi:10.1049/ip-epa:20010351.

175. Источники электропитания радиоэлектронной аппаратуры: Справочник / Г. С. Найвельт, К. Б. Мазель, Ч. И. Хусаинов и др. Под ред. Г. С. Найвельта. - М.: Радио и связь, 1985. – 576 с.

176. Mehrasa, M., Pouresmaeil, E., Zabihi, S., Trujillo Caballero, J., and Catalão, J. A Novel Modulation Function-Based Control of Modular Multilevel Converters for High Voltage Direct Current Transmission Systems. Energies, vol. 9, no. 11, 2016. – 867 p. . – doi: 10.3390/en9110867.

177. Sirisukprasert, S., Jih-Sheng, Lai, Tian-Hua, Liu. Optimum harmonic reduction with a wide range of modulation indexes for multilevel converters. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 49(4), 2002. – p. 875-881. doi:10.1109/tie.2002.801226.

178. Kazmierkowski, M.P. DSP-Based Control of Grid-Connected Power Converters Operating Under Grid Distortions. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 7(2), 2011. - p. 204-211. – doi: 10.1109/tii.2011.2134856.

179. Shi, X., Jiang, J., Guo, X. An Efficiency-Optimized Isolated Bidirectional DC-DC Converter with Extended Power Range for Energy Storage Systems in Microgrids. Energies, 2013, Vol. 6, p. 27-44. – doi: 10.3390/en6010027.

180. Mikolaiets, D. The calculating algorithm of active power line conditioner with uninterruptible power supply function. IEEE 35th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), 2015. – doi:10.1109/elnano.2015.7146945.

181. Krismer, F., Kolar, J.W. Closed Form Solution for Minimum Conduction Loss Modulation of DAB Converters // IEEE Transactions on Power Electronics, 2012, Vol. 27(1), p. 174–188. – doi: 10.1109/tpel.2011.2157976.

182. Вербицький, Є. В. Спектр напруги ізольованого інвертора з двополярною модуляцією / Є. В. Вербицький // Вісник НТУ «ХП», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХП». – 2019. – № 2. – С. 10-16. – doi:10.20998/2413-4295.2019.02.02.
183. Verbytskyi Ievgen. Spectrum analysis of a bipolar voltage on basis the double Fourier series. IEEE 36th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, 2016, P. 296-299. doi: 10.1109/ELNANO.2016.7493071.
184. V. Y. Zhuikov. Spectrum analysis of bipolar pulse frequency modulation voltage/ V. Y. Zhuikov; I. V. Verbytskyi. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, P. 1-4. doi: 10.1109/IEPS.2016.7521871.
185. Вербицький Є.В. Аналіз спектру напруги з двополярною модуляцією / Є.В. Вербицький // Вісник Національного технічного університету «ХП». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях - 2017, № 23 (1245), с. 188-193.
186. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 480 с.
187. Вербицький Є.В. Використання поліномів Чебишева для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2014, № 9 (128), Т.2, с. 161-164.
188. Бальян Р.Х., Обрусник В.П. Оптимальное проектирование силовых высокочастотных устройств. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. – 168 с.
189. Hewitt, Edwin; Hewitt, Robert E. The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis. Archive for History of Exact Sciences 1979, 21 (2), pp. 129–160. doi:10.1007/BF00330404.
190. Andrew Dimarogonas. Vibration for engineers, 1996. ISBN 978-0-13-462938-4.
191. Carbone, R., Castaldo, D., Langella, R., & Testa, A., Probabilistic modeling of industrial systems for voltage distortion analyses 9th International Conference on Harmonics and Quality of Power. Proceedings, 2000. doi: 10.1109/ichqp.2000.897748.

192. Carbone, R., Castaldo, D., De Rosa, F., Langella, R., & Testa, A. Monte Carlo simulation of AC/DC/AC power converter distortion. 2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings, 2001. doi: 10.1109/ptc.2001.964768.
193. Testa, A., Akram, M. F., Burch, R., Carpinelli, G., Chang, G., Dinavahi, V., ... Xu, W. Interharmonics: Theory and Modeling. IEEE Transactions on Power Delivery, 2007, 22(4), pp. 2335–2348. doi: 10.1109/tpwrd.2007.905505.
194. I. V. Verbytskyi. A Disturbed Grid Voltage Interharmonic Analysis with Fourier Series of Several Variables. Microsystems, Electronics and Acoustics, 2020, Vol. 25, № 2, p. 25-32. doi: 10.20535/2523-4455.mea.208428.
195. Langella, R., Testa, A., & Emanuel, A. E. (2008). On the Effects of Subsynchronous Interharmonic Voltages on Power Transformers: Single Phase Units. IEEE Transactions on Power Delivery, 2008, 23(4), pp. 2480–2487. doi:10.1109/tpwrd.2008.923098.
196. San Martin, J., Pontt, J., Bello, F., & Aguilera, R. Interharmonics Power Losses Estimation in Power Transformer fed High Power Cycloconverter Drive. 2008 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting. doi:10.1109/08ias.2008.345.
197. Gallo, D., Langella, R., Testa, A., & Emanuel, A. (n.d.). On the effects of voltage subharmonics on power transformers: a preliminary study. 2004 11th International Conference on Harmonics and Quality of Power. doi:10.1109/ichqp.2004.1409405.
198. Чиженко І.М., Руденко В.С., СЕНЬКО В.І. Основи преобразовательной техники: учеб. для вузов. М.: Высш. шк, 1980, 480 с.
199. Векслер Г.С. Расчет электропитающих устройств. Киев, «Техніка», 1978, 208 с.
200. Nirgude, G., Tirumala, R., & Mohan, N. (n.d.). A new, large-signal average model for single-switch DC-DC converters operating in both CCM and DCM. 2001 IEEE 32nd Annual Power Electronics Specialists Conference (IEEE Cat. No.01CH37230). doi:10.1109/pesc.2001.954370.
201. Ievgen Verbytskyi. Principle of Interharmonic Detection in Transformer of AC-DC Converter Based Double Fourier Series. 2020 IEEE 40th International

Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO, 2020. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088778.

202. Зиновьев Г.С. Силовая электроника: учеб. пособие для бакалавров / Г.С. Зиновьев. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2012. – 667 с.

203. Пересада С.М. Ковбаса С.Н., Трандафилов В.Н., Бовкунович В.С. Адаптивное к вариациям активного сопротивления ротора векторное управление асинхронным двигателем на основе нелинейного принципа разделения. Технічна електродинаміка. 2015. №1. С. 43–50..

204. Bolgietti A. et al. About the design of very high frequency induction motors for spindle applications, Conf. Rec. IEEE-IAS Annual Meeting, October, 1992, Vol. 1, 25–32.

205. Пересада С. М., Ковбаса С. М., Бовкунович В.С. Сравнительное тестирование алгоритмов векторного и частотного управления моментом асинхронного двигателя в электромеханических системах пассажирского электротранспорта. Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені М. Остроградського. Кременчук, 2009. Вип. 4/2009. Ч. 1. С. 13 – 16..

206. Buczek K., Sobczynski D. Analysis of Induction Motor and 330 Hz Inverter Drive System, 13th Int. Conf. on Electrical Drives and Power Electronics, EDPE'99, 1999, 64–68.

207. Пересада С. М., Ковбаса С. Н., Крыжановский В. П., Бовкунович В. С. Система управления моментом асинхронного двигателя для тяговых электроприводов. Інформаційний збірник "Промислова електроенергетика та електротехніка". 2007. №1. С. 66 -70..

208. Bose, Bimal K. Modern power electronics and AC drives. Prentis hall PTR, 2002, 711 p.

209. Malcolm Barnes. Practical Variable Speed Drives and Power Electronics. Elsevier, 2003, 286 p.

210. Verbytskyi I.V., Zhuikov V.J. Asynchronous motor drive interharmonics calculation based on generalized Fourier series of several variables. *Technical Electrodynamics*, 2020, № 2, pp. 36-42. doi: 10.15407/techned2020.02.036.
211. Mekhiche M. et al. High speed motor drive development for industrial applications, *Int. Electric Machines Drives Conf.*, Seattle, WA, 1999, pp. 244–248.
212. Popescu M. Induction motor modelling for vector control purposes, Helsinki University of Technology Department of Electrical and Communications Engineering Laboratory of Electromechanics Espoo'2000, Report 63, 2000.
213. Schramm, S., Sihler, C., Song-Manguelle, J., & Rotondo, P. (2010). Damping Torsional Interharmonic Effects of Large Drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 25(4), pp. 1090–1098. doi:10.1109/tpel.2009.2033274.
214. Tayjasanant, T., & Xu, W. A case study of flicker/interharmonic problems caused by a variable frequency drive. 2004 11th International Conference on Harmonics and Quality of Power. doi:10.1109/ichqp.2004.1409331.
215. Rifai, M. R., Ortmeyer, T. H., & McQuillan, W. J. (2000). Evaluation of current interharmonics from AC drives. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 15(3), 1094–1098. doi:10.1109/61.871380
216. Yacamini, R. (1996). Power system harmonics. Part 4: Interharmonics. *Power Engineering Journal*, 10(4), 185–193. doi:10.1049/pe:19960411.
217. Lai, J.-S., & Chen, D. Design consideration for power factor correction boost converter operating at the boundary of continuous conduction mode and discontinuous conduction mode. *Proceedings Eighth Annual Applied Power Electronics Conference and Exposition*. doi:10.1109/apec.1993.290621.
218. Liu, K.-H., & Lin, Y.-L. Current waveform distortion in power factor correction circuits employing discontinuous-mode boost converters. 20th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference. doi:10.1109/pesc.1989.48565.
219. Zhang, M. T., Yimin Jiang, Lee, F. C., & Jovanovic, M. M. (n.d.). Single-phase three-level boost power factor correction converter. *Proceedings of 1995 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC'95*. doi:10.1109/apec.1995.468984.

220. Simonetti, D. S. L., Sebastian, J., dos Reis, F. S., & Uceda, J. (n.d.). Design criteria for SEPIC and Cuk converters as power factor preregulators in discontinuous conduction mode. *Proceedings of the 1992 International Conference on Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation*. doi:10.1109/iecon.1992.254619.
221. Lee, S.-W., & Do, H.-L. A Single-Switch AC–DC LED Driver Based on a Boost-Flyback PFC Converter With Lossless Snubber. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2017, 32(2), pp. 1375–1384. doi:10.1109/tpel.2016.2549029.
222. Chen, Y.-L., & Chen, Y.-M. Line Current Distortion Compensation for DCM/CRM Boost PFC Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2016, 31(3), pp. 2026–2038. doi:10.1109/tpel.2015.2434885.
223. Ku, C.-P., Chen, D., & Lin, S.-H. A new control scheme for boost PFC converters for both CCM and DCM operations. *2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, 2011. doi:10.1109/ecce.2011.6063933.
224. Akhlaghi, B., & Farzanehfard, H. Family of ZVT Interleaved Converters With Low Number of Components. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(11), 8565–8573. doi:10.1109/tie.2018.2808915.
225. Slah, F., Mansour, A., Hajer, M., & Faouzi, B. Analysis, modeling and implementation of an interleaved boost DC-DC converter for fuel cell used in electric vehicle. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2017, 42(48), 28852–28864. doi:10.1016/j.ijhydene.2017.08.068.
226. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Elizaveta Liivik. Control features of multicell-type current regulator for resistance welding. *2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON)*, Riga, 2017, Pp. 1 – 5. doi: 10.1109/RTUCON.2017.8124846.
227. Konstantinou, G., Capella, G. J., Pou, J., & Ceballos, S. (2018). Single-Carrier Phase-Disposition PWM Techniques for Multiple Interleaved Voltage-Source Converter Legs. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(6), 4466–4474. doi:10.1109/tie.2017.2767541.

228. Chin Chang, & Knights, M. A. Interleaving technique in distributed power conversion systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1995, 42(5), 245–251. doi:10.1109/81.386158.
229. Simonetti, D. S. L., Sebastian, J., & Uceda, J. The discontinuous conduction mode Sepic and Cuk power factor preregulators: analysis and design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1997, 44(5), 630–637. doi:10.1109/41.633459.
230. Lee, J.-Y., & Chae, H.-J. 6.6-kW Onboard Charger Design Using DCM PFC Converter With Harmonic Modulation Technique and Two-Stage DC/DC Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(3), pp. 1243–1252. doi:10.1109/tie.2013.2262749.
231. Pellegrino, G., Armando, E., & Guglielmi, P. An Integral Battery Charger With Power Factor Correction for Electric Scooter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2010, 25(3), pp. 751–759. doi:10.1109/tpel.2009.2033187.
232. Vahedi, H., Labbe, P.-A., & Al-Haddad, K. Single-Phase Single-Switch Vienna Rectifier as Electric Vehicle PFC Battery Charger. 2015 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC). doi:10.1109/vppc.2015.7353019.
233. Galkin, I.; Podgornovs, A.; Blinov, A.; Vitols, K.; Vorobyov, M.; Kosenko, R. Considerations regarding the concept of cost-effective power-assist wheelchair subsystems. *Electr. Control Commun. Eng.* 2018, 14, 71–80. doi: 10.2478/ecce-2018-0008.
234. Product specification. Rechargeable Lithium Ion Battery. Model : INR18650 MJ1 3500mAh. Document No. LGC MBD/MBDC. Prepared by Oh, Kyung Su, 2014, 10 p.
235. Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D.; Vinnikov, D.; Galkin, I. Modular Battery Charger for Light Electric Vehicles. *Energies*, 2020, 13, 774. doi: 10.3390/en13040774.
236. Galkin, I.; Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D. Modular Self-Balancing Battery Charger Concept for Cost-Effective Power-Assist Wheelchairs. *Energies* 2019, 12, 1526. Doi: 10.3390/en12081526.
237. Хрусталеv Д.А. Аккумуляторы. – М.: Изумруд, 2004, 223 с.

238. В.О. Снегірєв, В.Б. Волківський. Дослідження впливу заряду асиметричним струмом на ємність акумуляторних батарей. Мікросистеми, електроніка, акустика, 2018, 23(4), с. 51-57. doi: 10.20535/2523-4455.2018.23.4.128530.

239. Patnaik, L., Jaya Sai, P., & Williamson, S. S., “A Closed-loop Constant-temperature Constant-voltage Charging Technique to Reduce Charge Time of Lithium-ion Batteries,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 1–1.

240. Verbytskyi, I. V. Input Current Quality Parameters Analysis of Modular AC-DC SEPIC Charger Based on Double Fourier Series. Мікросистеми, Електроніка та Акустика, 2019, 24(6), p. 29-37. doi: 10.20535/2523-4455.2019.24.6.197361.

241. J. Yao, A. Abramovitz, and K. Smedley. Analysis and design of charge pump-assisted high step-up tapped inductor SEPIC converter with an “inductor-less” regenerative snubber. IEEE Trans. Power Electron., 2015, vol. 30, no. 10, pp. 5565–5580. doi: 10.1109/TPEL.2014.2374992.

242. T. Meng, H. Ben, L. Zhu, and G. Wei. Improved passive snubbers suitable for single-phase isolated full-bridge boost power factor correction converter. IET Power Electron., 2014, vol. 7, no. 2, pp. 279–288.

243. Tibola, G., Lemmen, E., Duarte, J. L., & Barbi, I. (2017). Passive Regenerative and Dissipative Snubber Cells for Isolated SEPIC Converters: Analysis, Design, and Comparison. IEEE Transactions on Power Electronics, 32(12). – 2017, Pp. 9210–9222. doi:10.1109/tpel.2017.2653940.

244. Yao, J., Abramovitz, A., & Ma Smedley, K. Steep-Gain Bidirectional Converter With a Regenerative Snubber. IEEE Transactions on Power Electronics, 30(12). - 2015, Pp. 6845–6856. doi:10.1109/tpel.2015.2395455.

245. TinySwitch-4. Available online: <https://acdc.power.com/products/tinyswitch-family/tinyswitch-4/> (дата звернення 30.03.2020) – назва з екрана.

246. S. Bala, T. Tegnér, P. Rosenfeld and F. Delince. The effect of low frequency current ripple on the performance of a Lithium Iron Phosphate (LFP) battery energy storage system. 2012 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), Raleigh, NC, 2012, pp. 3485-3492. doi: 10.1109/ECCE.2012.6342318.

247. Vu, P. V., & Chandler, D. M. A Fast Wavelet-Based Algorithm for Global and Local Image Sharpness Estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(7), 423–426. doi:10.1109/lsp.2012.2199980.

248. Shyang-Chyun Chen, Chao-Chuan Chen, Wen-Chi Guo, Tay-Jyi Lin, & Ching-Wei Yeh. Complexity-effective Hilbert-Huang transform (HHT) IP for embedded real-time applications. 17th Asia and South Pacific Design Automation Conference, 2018. doi:10.1109/aspdac.2012.6164997.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати

Монографія

1. Вербицький Є.В., Кисельова А. Г., Осипенко К. С. Контекстно-залежне керування автономними системами електроживлення: під загальною редакцією д.т.н. Жуйкова В.Я. – К.: Аверс, 2015. – 187 с. (*Здобувачем розроблені спеціалізовані закони модуляції напівпровідниковими перетворювачами для контекстно-залежного керування джерелами енергії*).

Публікації у фахових виданнях:

2. Е.В. Вербицкий, А.Г. Киселева. Использование контекстных данных при управлении распределенной сетью электропитания. *Технічна електродинаміка* – 2016, № 1, с. 55-59. (*Здобувачем синтезовано закон керування розподіленою мережею із задавальною дією на основі контекстних даних*), (Scopus).

3. Ромашко В.Я., Вербицький Є.В., Киричек Є.І. Аналіз втрат енергії в системі відбору максимальної потужності сонячної батареї. *Технічна електродинаміка* – 2014, № 4, с. 55-57. (*Здобувачем запропоновано принцип керування пристроєм відбирання максимальної потужності*), (Scopus).

4. Zhuikov, V.J., Verbytskyi, I.V., Kyselova, A.G. Reactive power compensation approach with dynamic mode of load current. *Technical Electrodynamics* – 2018, № 4, pp. 47-52. (*Здобувачем запропонована методика компенсація реактивної потужності та алгоритм її реалізації*), (Scopus).

5. Verbytskyi I.V., Zhuikov V.J. Asynchronous motor drive interharmonics calculation based on generalized Fourier series of several variables. *Technical Electrodynamics*, 2020, № 2, pp. 36-42. (*Здобувачем адаптовано використання узагальненого ряду Фур'є декількох змінних для розрахунків рівня інтергармонічних спотворень у перетворювачі електропривода асинхронного двигуна*), (Scopus).

6. Bondarenko, O., Verbytskyi, I., Prokopets, V., Kaloshyn, O., Spitsyn, D., Ryzhakova, T., Kozhushko, Y. Modular Power Supply for Micro Resistance Welding. *Electrical, Control and Communication Engineering*, 12(1), 2017, Pp. 20-26.

(Здобувачем синтезовано закон керування модульним перетворювачем для контактного зварювання), (Web of Science, іноземне видання).

7. Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D.; Vinnikov, D.; Galkin, I. Modular Battery Charger for Light Electric Vehicles. *Energies*, 2020, 13, 774. (Здобувачем розроблено закон керування та принципову схему модульного перетворювача), (Scopus, іноземне видання).

8. Galkin, I.; Blinov, A.; Verbytskyi, I.; Zinchenko, D. Modular Self-Balancing Battery Charger Concept for Cost-Effective Power-Assist Wheelchairs. *Energies*, 2019, 12, 1526. (Здобувачем розроблено принцип пасивного балансування акумуляторних батаерей), (Scopus, іноземне видання).

9. Жуйков В.Я. Вербицкий Е.В., Осипенко К.С. Формирование синусоидального напряжения разнотипными источниками энергии. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2013, № 8(114), Т.2, с. 104-107. (Здобувачем розроблено закон модуляції для паралельно під'єднаних джерел електроенергії)

10. Вербицкий Є.В., Ромашко В.Я. Особенности поиска точки максимальной мощности солнечной батареи методами холостого хода и короткого замыкания. *Електроніка і зв'язок*. – 2013. № 5, с. 13-18. (Здобувачем проаналізована ефективність використання методів холостого ходу і короткого замикання).

11. V.Y. Zhuikov, I.V. Verbytskyi, O.F. Bondarenko Zhuikov V.Y. Особенности компенсации миттєвої реактивной мощности в линейных цепях у перехідному режимі при вмиканні навантаження. *Електроніка та зв'язок* – 2017, № 22 (4), с. 30-37. (Здобувачем запропонований принцип компенсації реактивної потужності у перехідних режимах).

12. Є. В. Вербицкий, К. А. Ходаков. Аналіз параметрів якості електроенергії при встановленні компенсаторів реактивної потужності. *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – 45 (1321). – с. 234-242. (Здобувачем запропонована методика порівняння споживання реактивної потужності побутовими споживачами електроенергії).

13. Є. В. Вербицький, Р. М. Прибудько, Д. О. Зінченко, М. О. Мацюк. Компенсатор реактивної потужності у перехідних режимах. Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 26 (1302). – Т. 2. – С. 121-125. *(Здобувачем запропонований алгоритм роботи компенсатора реактивної потужності).*

14. Вербицький, Є. В. Швидке перетворення Фур'є модульованих сигналів, представлених рядом Фур'є двох змінних. Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 16 (1292). – с. 102-106.

15. Д.Р. Ушаков, Е.В. Вербицкий. Анализ методов формирования квазисинусоидальных напряжений с минимизацией коэффициента гармонических искажений. Збірник "Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України" - 2016, вип. 43, с. 102-106. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку спектра модульованих сигналів на основі ряду Фур'є двох змінних).*

16. Вербицький Є.В. Особливості розрахунку спектру напруги, модульованої по закону ШІМ I і II на основі подвійного ряду Фур'є. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 5, с. 36-45.

17. Вербицький Є.В. Визначення кратності ШІМ напруги інвертора за значенням коефіцієнта гармонік на основі подвійного ряду Фур'є. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 4, с. 21-28.

18. Вербицький Є.В., Гонтарев Д.О., Путілін М.В. Розрахунок інтегральних показників модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є. Електроніка і зв'язок. – 2014. № 6, с. 52-57. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку інтегральних показників якості модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є).*

19. Путілін М.В., Вербицький Є.В. Зменшення динамічних втрат у інверторах квазісинусоїдальної напруги за допомогою регулювання кратності модуляції вихідної напруги. Електроніка і зв'язок. – 2015. № 3, с. 51-55. *(Здобувачем запропоновано методику розрахунку коефіцієнта гармонік модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є).*

20. Вербицький, Є. В. Спектр напруги ізольованого інвертора з двополярною модуляцією. Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2019. – № 2. – с. 10-16.

21. Вербицький Є.В. Аналіз спектру напруги з двополярною модуляцією. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях. – 2017, № 23 (1245), с. 188-193.

22. Вербицький Є.В. Використання поліномів Чебишева для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2014, № 9 (128), Т.2, с. 161-164.

23. I. V. Verbytskyi. A Disturbed Grid Voltage Interharmonic Analysis with Fourier Series of Several Variables. Microsystems, Electronics and Acoustics, 2020, Vol. 25, № 2, p. 25-32.

24. Verbytskyi, I. V. Input Current Quality Parameters Analysis of Modular AC-DC SEPIC Charger Based on Double Fourier Series. Мікросистеми, Електроніка та Акустика. – 2019, 24(6), p. 29-37.

Патенти на винахід

25. Спосіб формування синусоїдальної напруги на основі перетворювача з амплітудно-широтно-імпульсною модуляцією та пристрій для його реалізації. Патент на винахід № 108127, чинний з 25.03.2015, опубл. 25.03.2015 бюл. № 6, Жуйков В.Я., Вербицький Є.В., Осипенко К.С. *(Здобувачем запропоновано принцип модуляції напруги перетворювачів, що працюють паралельно).*

26. Пристрій компенсації реактивної потужності у перехідних і усталених режимах. Жуйков В.Я., Вербицький Є.В. Патент на винахід № 118584, чинний з 11.02.2019, опубл. 11.02.2019, Бюл.№ 3. *(Здобувачем запропоновано принцип модуляції напруги компенсатора реактивної потужності у перехідних режимах).*

Матеріали конференцій:

27. Context-aware framework for energy management system. A. G. Kyselova; I. V. Verbitskyi; G. D. Kyselov. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, pp. 1-4. *(Здобувачем запропоновано принцип керування автономною системою електроживлення).*

28. Ievgen Verbytskyi; Anna Kyselova; Gennadiy Kyselov. Power grid converter control improvement based on contextual data. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, pp. 599-604. *(Здобувачем розроблено закони модуляції перетворювачами, під'єднаних до джерел відновлювальної енергії).*

29. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Dmitri Vinnikov. Multicell-type current regulator based on Cuk converter for resistance welding. 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON), Riga, 2017, pp. 1 – 6. *(Здобувачем розроблено закони модуляції перетворювачами комірок модульного регулятора струму).*

30. Verbytskyi Ievgen. Spectrum calculation of frequency pulse modulation voltage using double Fourier series. Conference IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering, Riga, 2015, pp. 1-4.

31. Ievgen Verbytskyi. A double fourier series implementation for modulated signal with the arbitrary modulation. 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), 2017, pp. 518-521.

32. Verbytskyi Ievgen. Spectrum analysis of a bipolar voltage on basis the double Fourier series. IEEE 36th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), Kyiv, 2016, pp. 296-299.

33. V. Y. Zhuikov; I. V. Verbytskyi. Spectrum analysis of bipolar pulse frequency modulation voltage. 2nd International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS), Kyiv, 2016, pp. 1-4. *(Здобувачем розроблено методику розрахунку спектра напруги з двополярною частотно-імпульсною модуляцією).*

34. Ievgen Verbytskyi. Principle of Interharmonic Detection in Transformer of AC-DC Converter Based Double Fourier Series. 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO, 2020.

35. Ievgen Verbytskyi, Oleksandr Bondarenko, Elizaveta Liivik. Control features of multicell-type current regulator for resistance welding. 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University

(RTUCON), Riga, 2017, pp. 1 – 5. (Здобувачем розроблено принцип керування модульним перетворювачем).

Особистий внесок здобувача.

Дисертаційна робота є узагальненням результатів автора із застосування рядів Фур'є для підвищення ефективності керування напівпровідниковими перетворювачами при забезпеченні необхідних параметрів якості електроенергії та врахування інтергармонічних складових. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належать: у роботах [1-3], [9, 10, 25, 27, 28] автором розроблено спеціалізовані способи модуляції перетворювачами електричної енергії, що дозволяють під'єднувати паралельно декілька різнотипних джерел енергії та формувати в навантаженні або системі електроживлення струм із задовільними показниками електричної енергії; в [4], [11-13], [26] – розроблено наукові засади компенсації реактивної потужності у перехідних режимах та оцінено покращення параметрів якості електроенергії від її впровадження; в [6-8], [29, 35] – запропоновано покращення параметрів якості електроенергії за допомогою модульних перетворювачів з чергуванням фаз та оцінено ефект від їх використання; в [15, 18, 19] – проаналізовано методи підвищення параметрів якості електроенергії при застосуванні спеціалізованих законів модуляції на основі узагальненого ряду Фур'є декількох змінних.

ДОДАТОК Б. ФОРМУЛИ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРАЛЬНИХ КОМПОНЕНТ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Однополярна ШИМ-II з модуляцією переднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_\pi^{2\pi} \int_{2\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (\text{Б.1})$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ в формулі (Б.1) розраховуються на основі суми двох інтегралів, оскільки модулююча функція $y_M = \mu \cdot \sin(x_2)$ змінює свою полярність кожні півперіода, тому на інтервалі $x_2 \in [0; \pi)$ амплітуда імпульсів модулюючого сигналу дорівнює A , $y(x_1, x_2) = A$, тоді як на інтервалі $[\pi; 2\pi)$ $y(x_1, x_2) = -A$. Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x_2+\pi))} dx_1 dx_2 \right) = \\ &= \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Відповідно до формули (Б.2) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j((2m_2-1)x_2+2\pi m_1)} - e^{j((2m_2-1)x_2+2\pi m_1(1-\mu\sin(x_2)))} \right) dx_2 = \\ &= \frac{A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j((2m_2-1)x_2)} - e^{j((2m_2-1)x_2-2\pi m_1\mu\sin(x_2))} \right) dx_2 = \\ &= \frac{A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j((2m_2-1)x_2)} - e^{j((2m_2-1)x_2} (\cos(2\pi m_1\mu\sin(x_2)) - j\sin(2\pi m_1\mu\sin(x_2))) \right) dx_2. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.3) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi m_1} \left(\frac{2(J_0(2m_1\pi\mu) + 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + jJ_{2m_2-1}(2m_1\pi\mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(2m_1\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right). \quad (\text{Б.4})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-II з модуляцією переднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.3):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{2\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 dx_2 = \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\pi} 2\pi\mu\sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{Б.5})$$

Однополярна ШІМ-II з модуляцією заднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi\mu\sin(x_2)} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-2\pi\mu\sin(x_2)} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (\text{Б.6})$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ в формулі (Б.6) розраховуються на основі суми двох інтегралів, оскільки модулююча функція $y_M = \mu \cdot \sin(x_2)$ змінює свою полярність кожні півперіода, тому на інтервалі $x_2 \in [0; \pi)$ амплітуда імпульсів модулюючого сигналу дорівнює A , $y(x_1, x_2) = A$, тоді як на інтервалі $[\pi; 2\pi)$ $y(x_1, x_2) = -A$. Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 + \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x_2 + \pi))} dx_1 dx_2 \right) =$$

$$= \frac{A(1 - (-1)^{m_2})}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (\text{Б.7})$$

Відповідно до формули (Б.7) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + (2m_2-1)x_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi e^{j((2m_2-1)x_2 + 2\pi m_1 \mu \sin(x_2))} - e^{j((2m_2-1)x_2)} dx_2 =$$

$$\frac{A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x_2} (\cos(2\pi m_1 \mu \sin(x_2)) + j \sin(2\pi m_1 \mu \sin(x_2))) - e^{j((2m_2-1)x_2)} dx_2.$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z \sin(x_2))$ і $\cos(z \sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.8) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi m_1} \left(\frac{2(J_0(2m_1 \pi \mu) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + j J_{2m_2-1}(2m_1 \pi \mu) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(2m_1 \pi \mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right). \quad (\text{Б.9})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-II з модуляцією заднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.7):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi 2\pi \mu \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{Б.10})$$

Однополярна ШІМ-II з двосторонньою модуляцією

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \quad (\text{Б.11})$$

Спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ в формулі (Б.11) розраховуються на основі суми двох інтегралів, оскільки модулююча функція $y_M = \mu \cdot \sin(x_2)$ змінює свою полярність кожні півперіода, тому на інтервалі $x_2 \in [0; \pi)$ амплітуда імпульсів модулюючого сигналу дорівнює A , $y(x_1, x_2) = A$, тоді як на інтервалі $[\pi; 2\pi)$ $y(x_1, x_2) = -A$. Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x_2+\pi))} dx_1 dx_2 \right) = \\ &= \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Відповідно до формули (Б.12) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{A(-1)^{m_1}}{j\pi^2 m_1} \int_0^{\pi} e^{j((2m_2-1)x_2+m_1\pi\mu\sin(x_2))} - e^{j((2m_2-1)x_2-m_1\pi\mu\sin(x_2))} dx_2 = \\ &= \frac{A(-1)^{m_1}}{j\pi m_1} (J_{2m_2-1}(-m_1\pi\mu) - J_{2m_2-1}(-m_1\pi\mu)) = \\ &= \frac{2Aj(-1)^{m_1}}{\pi m_1} J_{2m_2-1}(m_1\pi\mu). \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-II з двосторонньою модуляцією мають ненульові, уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні

компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.11):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu \sin(x_2))}^{\pi(1+\mu \sin(x_2))} e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi 2\pi\mu \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 1, m_2 \neq 0; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{Б.14})$$

Двополярна ШІМ-II з модуляцією переднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu \sin(x_2))/2} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu \sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \right.$$

$$\left. \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{\pi(1+\mu \sin(x_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu \sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right). \quad (\text{Б.15})$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu \sin(x_2))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu \sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2. \quad (\text{Б.16})$$

Відповідно до формули (Б.16) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu \sin(x_2))} e^{j(m_1 x_1 + (2m_2-1)x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu \sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + (2m_2-1)x_2)} dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \frac{2A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x_2} - e^{j(m_1 \pi(1-\mu \sin(x_2)) + (2m_2-1)x_2)} \right) dx_2 = \quad (\text{Б.17})$$

$$= \frac{2A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x_2} - (-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)x_2} (\cos(m_1 \pi \mu \sin(x_2)) - j \sin(m_1 \pi \mu \sin(x_2))) \right) dx_2.$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.17) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2A}{\pi m_1} \left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0(m_1 \pi \mu) + 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}(m_1 \pi \mu) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(m_1 \pi \mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right) \quad (\text{Б.18})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-II з модуляцією переднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.17):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} e^{j(2m_2-1)x_1} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(2m_2-1)x_1} dx_1 \right) dx_2 = \quad (\text{Б.19})$$

$$= \frac{2\mu A}{\pi} \int_0^\pi \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1; \\ A\mu, m_2 = 1; \\ -A\mu, m_2 = 0. \end{cases}$$

Двополярна ШІМ-II з модуляцією заднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \right. \quad (\text{Б.20})$$

$$\left. \int_\pi^{2\pi} \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x_2))} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right).$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x_2))} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 \right) dx_2. \quad (\text{Б.21})$$

Відповідно до формули (Б.21) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu \sin(x_2))} e^{j(m_1 x_1 + (2m_2-1)x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu \sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(m_1 x_1 + (2m_2-1)x_2)} dx_1 \right) dx_2 = \\ &= \frac{2A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left(e^{j(m_1 \pi(1+\mu \sin(x_2)) + (2m_2-1)x_2)} - e^{j(2m_2-1)x_2} \right) dx_2 = \\ &= \frac{2A}{j\pi^2 m_1} \int_0^\pi \left((-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)x_2} (\cos(m_1 \pi \mu \sin(x_2)) + j \sin(m_1 \pi \mu \sin(x_2))) - e^{j(2m_2-1)x_2} \right) dx_2. \end{aligned} \quad (Б.22)$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z \sin(x_2))$ і $\cos(z \sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.22) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{2A}{\pi m_1} \left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0(m_1 \pi \mu) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + (-1)^{m_1} \left(j J_{2m_2-1}(m_1 \pi \mu) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}(m_1 \pi \mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (Б.23)$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-II з модуляцією заднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.22):

$$\begin{aligned} C_{(0)(2m_2-1)} &= \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu \sin(x_2))} e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu \sin(x_2))}^{2\pi} e^{j(2m_2-1)x_2} dx_1 \right) dx_2 = \\ &= \frac{2\mu A}{\pi} \int_0^\pi \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1; \\ A\mu, m_2 = 1; \\ -A\mu, m_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (Б.24)$$

Двополярна ШІМ-II з двосторонньою модуляцією

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 - \right. \\ \left. \int_\pi^{2\pi} \left(- \int_0^{\frac{\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\frac{\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right). \quad (\text{Б.25})$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \times \int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2. \quad (\text{Б.26})$$

Відповідно до формули (Б.26) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+(2m_2-1)x_2)} dx_1 \right) dx_2 = \\ = \frac{A}{jm_1\pi^2} \int_0^\pi \left(- \left(e^{j(m_1\pi(1-\mu\sin(x_2))/2+(2m_2-1)x_2)} - e^{j(2m_2-1)x_2} \right) + \right. \\ \left. + \left(e^{j(3m_1\pi(1+\mu\sin(x_2))/2+(2m_2-1)x_2)} - e^{j(m_1\pi(1-\mu\sin(x_2))/2+(2m_2-1)x_2)} \right) - \right. \\ \left. - \left(e^{j(2m_2-1)x_2} - e^{j(3m_1\pi(1+\mu\sin(x_2))/2+(2m_2-1)x_2)} \right) \right) dx_2 = \\ = \frac{2A(-1)^{m_1/2}}{jm_1\pi^2} \int_0^\pi \left(e^{j(m_1\pi\mu\sin(x_2)/2+(2m_2-1)x_2)} - e^{j(-m_1\pi\mu\sin(x_2)/2+(2m_2-1)x_2)} \right) dx_2 = \\ = \frac{4jA(-1)^{m_1/2}}{m_1\pi^2} J_{2m_2-1}(0.5m_1\pi\mu). \quad (\text{Б.27})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-II з двополярною модуляцією мають ненульові, уявні, значення

для непарних індексів m_2 . Оскільки для випадку $m_1 = 0$, спектральні компоненти $C_{(0)(2m_2-1)}$ мають невизначені значення, цей випадок розглядається окремо підстановкою значення $m_1 = 0$ у формулу (Б.27):

$$C_{(0)(2m_2-1)} = \frac{A}{\pi^2} \times \int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu \sin(x_2))}{2}} e^{j(2m_2-1)x_1} dx_1 + \int_{\frac{\pi(1-\mu \sin(x_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu \sin(x_2))}{2}} e^{j(2m_2-1)x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu \sin(x_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(2m_2-1)x_1} dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \frac{2\mu A}{\pi} \int_0^\pi \sin(x_2) e^{j(2m_2-1)x_2} dx_2 = \begin{cases} 0, m_2 \neq 0, m_2 \neq 1; \\ jA\mu, m_2 = 1; \\ -jA\mu, m_2 = 0. \end{cases}$$

Однополярна ШІМ-I з модуляцією переднього фронту

Вираз для розрахунку спектральної характеристики $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з модуляцією переднього фронту є таким:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu \sin(x_2'))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 - \int_\pi^{2\pi} \int_{2\pi(1+\mu \sin(x_2'))}^{2\pi} A e^{j(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2 \right), \quad (\text{Б.28})$$

де x_2' - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x_2' = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad (\text{Б.29})$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$x_2 = x_2' + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P};$$

$$dx_2 = dx_2', \quad (\text{Б.30})$$

у формулі (Б.28), отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \int_{2\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \quad (\text{Б.31})$$

Змінімо у другому інтегралі виразу (Б.31) межі інтегрування на $(0;\pi)$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1-(-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 dx'_2. \quad (\text{Б.32})$$

Відповідно до формули (Б.32) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 dx'_2 = \\ = \frac{Ae^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{j\pi^2(m_1+(2m_2-1)/P)} \times \\ \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} - e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x'_2)+(2m_2-1)x'_2)} \right) dx'_2 = \\ = \frac{Ae^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{j\pi^2(m_1+(2m_2-1)/P)} \times \\ \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} - e^{j(2m_2-1)x'_2} (\cos((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x'_2)) - \right. \\ \left. - j\sin((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x'_2))) \right) dx'_2. \quad (\text{Б.33})$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.33) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times$$

$$\left(\frac{2(J_0((m_1 + (2m_2 - 1) / P)2\pi\mu) + 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)2\pi\mu) + \right. \quad (\text{Б.34})$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)2\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right).$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з модуляцією переднього фронту мають ненульові, комплексні, значення для непарних індексів m_2 .

Однополярна ШІМ-I з модуляцією заднього фронту

Вираз для розрахунку спектральної характеристики $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з модуляцією заднього фронту є таким:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi\mu \sin(x'_2)} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-2\pi\mu \sin(x'_2)} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right), \quad (\text{Б.35})$$

де x'_2 - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x'_2 = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad (\text{Б.36})$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$x_2 = x'_2 + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P};$$

$$dx_2 = dx'_2, \quad (\text{Б.37})$$

у формулі (Б.35), отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi\mu \sin(x'_2)} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right.$$

$$\left. - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-2\pi\mu \sin(x'_2)} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \quad (\text{Б.38})$$

Змінімо у другому інтегралі виразу (Б.38) межі інтегрування на $(0;\pi)$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1-(-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x_2')} dx_1 dx_2'. \quad (\text{Б.39})$$

Відповідно до формули (Б.39) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x_2')} dx_1 dx_2' = \\ &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{j\pi^2(m_1+(2m_2-1)/P)} \int_0^\pi \left(e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x_2')+(2m_2-1)x_2')} - e^{j(2m_2-1)x_2'} \right) dx_2' = \\ &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{j\pi^2(m_1+(2m_2-1)/P)} \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x_2'} (\cos((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x_2')) + \right. \\ &\quad \left. + j\sin((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu\sin(x_2'))) - e^{j(2m_2-1)x_2'} \right) dx_2'. \end{aligned} \quad (\text{Б.40})$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.40) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1+(2m_2-1)/P)} \times \\ &\left(\frac{2(J_0((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu)-1)}{\pi(2m_2-1)} + jJ_{2m_2-1}((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2-1+2\nu} + \frac{1}{2m_2-1-2\nu} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.41})$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з модуляцією заднього фронту мають ненульові, комплексні, значення для непарних індексів m_2 .

Однополярна ШІМ-I з двосторонньою модуляцією

Вираз для розрахунку спектральної характеристики $C_{(m_1)(m_2)}$ модульованого сигналу за законом однополярної ШІМ-I з двосторонньою модуляцією є таким:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 \right), \quad (\text{Б.42})$$

де x'_2 - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x'_2 = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad (\text{Б.43})$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$\begin{aligned} x_2 &= x'_2 + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}; \\ dx_2 &= dx'_2, \end{aligned} \quad (\text{Б.44})$$

у формулі (Б.42), отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.45})$$

Змінимо у другому інтегралі виразу (Б.45) межі інтегрування на $(0;\pi)$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 dx'_2. \quad (\text{Б.46})$$

Відповідно до формули (Б.46) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 dx'_2 =$$

$$= \frac{A(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{j\pi^2(m_1+(2m_2-1)/P)} \quad (\text{Б.47})$$

$$\int_0^\pi \left(e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)+(2m_2-1)x'_2)} - e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)+(2m_2-1)x'_2)} \right) dx'_2 =$$

$$= \frac{4jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi(m_1+(2m_2-1)/P)} J_{2m_2-1}(\pi\mu(m_1+(2m_2-1)/P)).$$

Двополярна ШІМ-I з модуляцією переднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \right.$$

$$\left. \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} A e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right). \quad (\text{Б.48})$$

де x'_2 - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x'_2 = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad (\text{Б.49})$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$x_2 = x'_2 + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}; \quad (\text{Б.50})$$

$$dx_2 = dx'_2,$$

у формулі (Б.48), отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 + \right. \quad (Б.51)$$

$$\left. \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 \right).$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 \right) dx'_2. \right. \quad (Б.52)$$

Відповідно до формули (Б.52) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 \right) dx'_2 = \right. \quad (Б.53)$$

$$= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2 j(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times \left(\int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}) - 2(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)\pi/P} e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)+(2m_2-1)x'_2)} \right) dx'_2 = \right.$$

$$= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2 j(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \left(\int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x'_2} (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}) - 2(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)\pi/P} e^{j(2m_2-1)x'_2} \times \right.$$

$$\left. (\cos((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu\sin(x'_2)) - j\sin((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu\sin(x'_2))) \right) dx'_2.$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.53) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1)/P)} \times \\
&\left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0((m_1 + (2m_2 - 1)/P)\pi\mu) + (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}))}{\pi(2m_2 - 1)} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)\pi\mu) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1)/P)\pi\mu)}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{Б.54}$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-I з модуляцією переднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 .

Двополярна ШІМ-I з модуляцією заднього фронту

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x_2'))} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x_2'))}^{2\pi} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \right. \\
&\quad \left. \int_\pi^{2\pi} \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x_2'))} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x_2'))}^{2\pi} Ae^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right).
\end{aligned} \tag{Б.55}$$

де x_2' - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x_2' = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \tag{Б.56}$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_2' + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}; \\
dx_2 &= dx_2',
\end{aligned} \tag{Б.57}$$

у формулі (Б.55), отримаємо:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 + \right. \quad (Б.58)$$

$$\left. \int_\pi^{2\pi} \left(- \int_0^{\pi(1-\mu\sin(x'_2))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 + \int_{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 \right).$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 \right) dx'_2. \right. \quad (Б.59)$$

Відповідно до формули (Б.59) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \times \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi(1+\mu\sin(x'_2))} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 - \int_{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}^{2\pi} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 \right) dx'_2 = \right. \quad (Б.60)$$

$$= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2 j(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times$$

$$\int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}) - 2(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)\pi/P} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)+(2m_2-1)x'_2)} \right) dx'_2 =$$

$$\frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2 j(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} (1 + e^{j2\pi(2m_2-1)/P}) - 2(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)\pi/P} e^{j(2m_2-1)x'_2} \times \right.$$

$$\left. (\cos((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu\sin(x'_2)) + j \sin((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu\sin(x'_2))) \right) dx'_2.$$

Підставивши розклад функцій $\sin(z\sin(x_2))$ і $\cos(z\sin(x_2))$ на основі функцій Бесселя в формулу (Б.60) з подальшим інтегруванням виразів, остаточно отримаємо:

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{2Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times$$

$$\left(\frac{2((-1)^{m_1} J_0((m_1 + (2m_2 - 1) / P)) - 1)}{\pi(2m_2 - 1)} + (-1)^{m_1} \left(jJ_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)) + \right. \right. \text{(Б.61)}$$

$$\left. \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{2\nu}((m_1 + (2m_2 - 1) / P))}{\pi} \left(\frac{1}{2m_2 - 1 + 2\nu} + \frac{1}{2m_2 - 1 - 2\nu} \right) \right) \right).$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-I з модуляцією заднього фронту мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 .

Двополярна ШІМ-I з двосторонньою модуляцією

Відповідно до формули (2.19) запишемо вираз для розрахунку спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \times$$

$$\left(\int_0^{\pi} \left(- \int_0^{\frac{2}{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{2}{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 + \right. \text{(Б.62)}$$

$$\left. \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{2}{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{2}{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 + \int_{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 \right) dx_2 \right).$$

де x'_2 - фаза відносно початку періода носійної функції, в якій фіксується значення модулюючої функції. Цей кут розраховується за формулою:

$$x'_2 = x_2 - \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}, \quad \text{(Б.63)}$$

де φ_f – кут фіксації змінної x_2 відносно періоду змінної x_1 .

Зробивши заміну

$$x_2 = x'_2 + \frac{(x_1 - \varphi_f)}{P}; \quad \text{(Б.64)}$$

$$dx_2 = dx'_2,$$

у формулі (Б.62), отримаємо:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{A}{2\pi^2} \times \\
& \times \left(\int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 + \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right. \right. \\
& - \left. \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 + \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 - \right. \\
& - \left. \left. \int_{\frac{\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 + \int_{\frac{3\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 \right) dx_2 \right). \quad (Б.65)
\end{aligned}$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{A(1-(-1)^{m_2})e^{-jm_2\varphi_f/P}}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 + \right. \\
& + \left. \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j((m_1+m_2/P)x_1+m_2x'_2)} dx_1 \right) dx'_2. \quad (Б.66)
\end{aligned}$$

Відповідно до формули (Б.66) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 + \right. \\
&+ \left. \int_{\frac{\pi(1-\mu\sin(x'_2))}{2}}^{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 - \int_{\frac{3\pi(1+\mu\sin(x'_2))}{2}}^{2\pi} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 \right) dx'_2. \\
&= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2 j(m_1 + (2m_2 - 1) / P)} \times \int_0^\pi \left(e^{j(2m_2-1)x'_2} (1 - e^{j2\pi(2m_2-1)/P}) + 2(-1)^{\frac{m_1}{2}} e^{j(2m_2-1)\pi/P} \times \right. \\
&\times \left(e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)/2+(2m_2-1)x'_2)} - e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu\sin(x'_2)/2+(2m_2-1)x'_2)} \right) \Big) dx'_2 = \\
&= \frac{4Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi(m_1 + m_2 / P)} \times \\
&\times \left(2j(-1)^{\frac{m_1}{2}} e^{j(2m_2-1)\pi/P} J_{2m_2-1}((m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu / 2) + \frac{(1 - e^{j2\pi(2m_2-1)/P})}{2\pi(2m_2 - 1)} \right). \quad (Б.67)
\end{aligned}$$

Отже, спектральні компоненти для модульованого сигналу за законом двополярної ШІМ-I з двосторонньою модуляцією мають ненульові, дійсні та уявні, значення для непарних індексів m_2 .

Однополярна ШІМ-I з модуляцією переднього фронту і передмодуляцією третьою гармонікою

Аналітичний запис спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ для заданого закону модуляції є таким:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} &= \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2))+a^*\sin(3x'_2)))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right. \\
&\left. - \int_\pi^{2\pi} \int_{2\pi(1+\mu^*(\sin(x'_2))+a^*\sin(3x'_2)))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \quad (Б.68)
\end{aligned}$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2))+a^*\sin(3x'_2)))}^{2\pi} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2. \quad (Б.69)$$

Відповідно до формули (Б.69) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{2\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))}^{2\pi} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 dx'_2 = \\
&= \frac{A(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \left(e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi+(2m_2-1)x'_2)} - \right. \\
&\quad \left. - e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)2\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))+(2m_2-1)x'_2)} \right) dx'_2 = \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \times \\
&\quad \int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x'_2} - e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)2\pi(\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))+(2m_2-1)x'_2)} dx'_2 = \\
&= \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(\frac{2j}{2m_2-1} - \right. \\
&\quad \left. \int_0^\pi (\cos(z\sin(x'_2)) - j\sin(z\sin(x'_2))) (\cos(za^*\sin(3x'_2)) - j\sin(za^*\sin(3x'_2))) \times \right. \\
&\quad \left. (\cos((2m_2-1)x'_2) + j\sin((2m_2-1)x'_2)) dx'_2 = \right. \\
&= \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(\frac{2j}{2m_2-1} - \right. \\
&\quad \cos(z\sin(x'_2))\cos(za^*\sin(3x'_2))\cos((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad j\cos(z\sin(x'_2))\cos(za^*\sin(3x'_2))\sin((2m_2-1)x'_2) - \\
&\quad - j\cos(z\sin(x'_2))\sin(za^*\sin(3x'_2))\cos((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad + \cos(z\sin(x'_2))\sin(za^*\sin(3x'_2))\sin((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad - j\sin(z\sin(x'_2))\cos(za^*\sin(3x'_2))\cos((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad + \sin(z\sin(x'_2))\cos(za^*\sin(3x'_2))\sin((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad - \sin(z\sin(x'_2))\sin(za^*\sin(3x'_2))\cos((2m_2-1)x'_2) + \\
&\quad \left. + j\sin(z\sin(x'_2))\sin(za^*\sin(3x'_2))\sin((2m_2-1)x'_2) \right). \tag{Б.70}
\end{aligned}$$

де $z = (m_1 + (2m_2 - 1) / P)\pi\mu^*$.

Оскільки для функцій $\sin(z\sin(x'_2))$ і $\sin(za^*\sin(3x'_2))$ істинні тотожності $\sin(z\sin(x'_2)) = \sin(z\sin(\pi - x'_2))$, $\sin(za^*\sin(3x'_2)) = \sin(za^*\sin(3(\pi - x'_2)))$, інтеграл (Б.70)

має ненульові значення лише для парних доданків. Використовуючи розклад функцій $\sin(\sin(x))$ і $\cos(\sin(x))$ для підстановки у формулу (Б.70), отримаємо:

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) \right) \left(J_0(za^*) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(za^*) \cos(6n_2x'_2) \right) = \\
& = \left(2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin((2n_1 - 1 - 6n_2)x'_2) + \sin((2n_1 - 1 + 6n_2)x'_2) \right) \Big) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \quad (Б.71) \\
& = j \left(J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) (\cos(2(n_1 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 + m_2 - 1)x'_2)) + \right. \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\cos(2(n_1 - 3n_2 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 - 3n_2 + m_2 - 1)x'_2) + \\
& \left. \cos(2(n_1 + 3n_2 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 + 3n_2 + m_2 - 1)x'_2)) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(J_0(z) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos(2n_1x'_2) \right) \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) \right) = \\
& = \left(2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin((3(2n_2 - 1) - 2n_1)x'_2) + \sin((3(2n_2 - 1) + 2n_1)x'_2) \right) \Big) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - m_2 - 1)x'_2) - \cos(2(3n_2 + m_2 - 2)x'_2) + \right. \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \quad (Б.72) \\
& - \cos(2(3n_2 - n_1 + m_2 - 2)x'_2) + \cos(2(3n_2 + n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \\
& \left. - \cos(2(3n_2 + n_1 + m_2 - 2)x'_2)) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(J_0(z) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos(2n_1 x'_1) \right) \left(J_0(za^*) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(za^*) \cos(6n_2 x'_2) \right) = \\
& = \left(J_0(z) J_0(za^*) + 2 J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos((2n_1)x'_1) + \right. \\
& + 2 J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \cos((6n_2)x'_1) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \\
& \times (\cos((2n_1 - 6n_2)x'_2) + \cos((2n_1 + 6n_2)x'_2)) \Big) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(J_0(z) J_0(za^*) \sin((2m_2 - 1)x'_2) + \right. \\
& + J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) (\sin(2m_2 + 2n_1 - 1)x'_2) - \sin((2m_2 - 2n_1 - 1)x'_2) \Big) + \\
& + J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) (\sin(2m_2 + 6n_2 - 1)x'_2) - \sin((2m_2 - 6n_2 - 1)x'_2) \Big) \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\sin(2(m_2 + n_1 - 3n_2) - 1) + \sin(2(m_2 - n_1 + 3n_2) - 1) + \\
& \sin(2(m_2 + n_1 + 3n_2) - 1) + \sin(2(m_2 - n_1 - 3n_2) - 1)); \tag{B.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) \right) \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) \right) = \\
& = \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \right. \\
& \times (\cos(6n_2 - 2n_1)x'_2) - \cos(6n_2 + 2n_1)x'_2 \Big) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\sin(2(m_2 + 3n_2 - n_1) - 1)x'_2) + \right. \\
& \sin(2(m_2 - 3n_2 + n_1) - 1)x'_2) - \\
& - \sin(2(m_2 + 3n_2 + n_1) - 1)x'_2 - \sin(2(m_2 - 3n_2 - n_1) - 1)x'_2 \Big). \tag{B.74}
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (Б.71)-(Б.74) у формулу (Б.70) та її подальшого інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} = & \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(\frac{2}{2m_2-1} - \frac{4J_0(za^*)J_{2m_2-1}(z)}{2m_2-1} - \right. \\
& + 2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \left(\frac{1}{2m_2+2n_1-1} - \frac{1}{2m_2-2n_1-1} \right) + \\
& + 2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \left(\frac{1}{2m_2+6n_2-1} - \frac{1}{2m_2-6n_2-1} \right) \\
& + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+n_1-3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1+3n_2)-1} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2(m_2+n_1+3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1-3n_2)-1} \right) + \\
& + \pi \left(J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \right. \\
& - \sum_{n_1-3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \\
& - \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& - \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& \left. - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \right) + \\
& + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+3n_2-n_1)-1} + \frac{1}{2(m_2-3n_2+n_1)-1} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2(m_2+3n_2+n_1)-1} - \frac{1}{2(m_2-3n_2-n_1)-1} \right). \tag{Б.75}
\end{aligned}$$

Однополярна ШІМ-I з модуляцією заднього фронту і передмодуляцією третьою гармонікою

Аналітичний запис спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ заданого закону модуляції є таким:

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x_2' + (x_1 - \varphi_f)/P))} dx_1 dx_2' - \right. \\ \left. - \int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x_2' + (x_1 - \varphi_f)/P))} dx_1 dx_2' \right). \quad (\text{Б.76})$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1 - (-1)^{m_2})}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j(m_1 x_1 + m_2 (x_2' + (x_1 - \varphi_f)/P))} dx_1 dx_2'. \quad (\text{Б.77})$$

Відповідно до формули (Б.77) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$C_{(m_1)(2m_2-1)} = \frac{Ae^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{j((m_1 + (2m_2-1)/P)x_1 + (2m_2-1)x_2')} dx_1 dx_2' = \\ = \frac{A(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi - \varphi_f)/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \left(e^{j((m_1 + (2m_2-1)/P)2\pi(\mu^*(\sin(x_2') + a^*\sin(3x_2')) + (2m_2-1)x_2')} - \right. \\ \left. - e^{j(2m_2-1)x_2'} \right) dx_2' = \frac{2jAe^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \times \\ \int_0^\pi e^{j((m_1 + (2m_2-1)/P)2\pi(\mu^*(\sin(x_2') + a^*\sin(3x_2')) + (2m_2-1)x_2')} - e^{j(2m_2-1)x_2'} dx_2' = \\ = \frac{2jAe^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \left(-\frac{2j}{2m_2-1} + \right. \\ \left. \int_0^\pi \left(\cos(z\sin(x_2')) - j\sin(z\sin(x_2')) \right) \left(\cos(za^*\sin(3x_2')) - j\sin(za^*\sin(3x_2')) \right) \times \right. \\ \left. (\cos((2m_2-1)x_2') + j\sin((2m_2-1)x_2')) dx_2' = \right. \\ = \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi - \varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(\frac{2j}{2m_2-1} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cos(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) \cos((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& j \cos(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) \sin((2m_2 - 1)x'_2) - \\
& - j \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) \cos((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& + \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) \sin((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& - j \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) \cos((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& + \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) \sin((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& - \sin(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) \cos((2m_2 - 1)x'_2) + \\
& + j \sin(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) \sin((2m_2 - 1)x'_2).
\end{aligned} \tag{Б.78}$$

де $z = (m_1 + (2m_2 - 1) / P) \pi \mu^*$.

Оскільки для функцій $\sin(z \sin(x'_2))$ і $\sin(za^* \sin(3x'_2))$ істинні тотожності $\sin(z \sin(x'_2)) = \sin(z \sin(\pi - x'_2))$, $\sin(za^* \sin(3x'_2)) = \sin(za^* \sin(3(\pi - x'_2)))$, інтеграл (Б.78) має ненульові значення лише для парних доданків. Використовуючи розклад функцій $\sin(asin(x))$ і $\cos(asin(x))$ для підстановки у формулу (Б.78), отримаємо:

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) \right) \left(J_0(za^*) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(za^*) \cos(6n_2x'_2) \right) = \\
& = \left(2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin((2n_1 - 1 - 6n_2)x'_2) + \sin((2n_1 - 1 + 6n_2)x'_2) \right) \left. \right) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \tag{Б.79} \\
& = j \left(J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) (\cos(2(n_1 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 + m_2 - 1)x'_2)) \right) + \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\cos(2(n_1 - 3n_2 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 - 3n_2 + m_2 - 1)x'_2) + \\
& \cos(2(n_1 + 3n_2 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 + 3n_2 + m_2 - 1)x'_2));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(J_0(z) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos(2n_1 x'_2) \right) \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) \right) = \\
& = \left(2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin((3(2n_2 - 1) - 2n_1)x'_2) + \sin((3(2n_2 - 1) + 2n_1)x'_2) \right) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - m_2 - 1)x'_2) - \cos(2(3n_2 + m_2 - 2)x'_2) + \right. \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \\
& - \cos(2(3n_2 - n_1 + m_2 - 2)x'_2) + \cos(2(3n_2 + n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \\
& \left. - \cos(2(3n_2 + n_1 + m_2 - 2)x'_2) \right). \tag{B.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(J_0(z) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos(2n_1 x'_2) \right) \left(J_0(za^*) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(za^*) \cos(6n_2 x'_2) \right) = \\
& = \left(J_0(z) J_0(za^*) + 2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos((2n_1)x'_2) + 2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \cos((6n_2)x'_2) + \right. \\
& + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\cos((2n_1 - 6n_2)x'_2) + \cos((2n_1 + 6n_2)x'_2)) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(J_0(z) J_0(za^*) \sin((2m_2 - 1)x'_2) + \right. \\
& + J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) (\sin(2m_2 + 2n_1 - 1)x'_2 - \sin((2m_2 - 2n_1 - 1)x'_2)) + \\
& + J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) (\sin(2m_2 + 6n_2 - 1)x'_2 - \sin((2m_2 - 6n_2 - 1)x'_2)) \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\sin(2(m_2 + n_1 - 3n_2) - 1) + \sin(2(m_2 - n_1 + 3n_2) - 1) + \\
& \left. \sin(2(m_2 + n_1 + 3n_2) - 1) + \sin(2(m_2 - n_1 - 3n_2) - 1) \right); \tag{B.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x_2') \sin(z \sin(x_2')) \sin(za^* \sin(3x_2')) = j \sin((2m_2 - 1)x_2') \times \\
& \times \left(2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \sin((2n_1 - 1)x_2') \right) \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x_2') \right) = \\
& = \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\cos(6n_2 - 2n_1)x_2' - \cos(6n_2 + 2n_1)x_2' \right) \right) \times \\
& \times j \sin((2m_2 - 1)x_2') = j \left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin(2(m_2 + 3n_2 - n_1) - 1)x_2' + \sin(2(m_2 - 3n_2 + n_1) - 1)x_2' - \right. \\
& \left. - \sin(2(m_2 + 3n_2 + n_1) - 1)x_2' - \sin(2(m_2 - 3n_2 - n_1) - 1)x_2' \right) \left. \right). \tag{Б.82}
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (Б.79)-(Б.82) у формулу (Б.78) та її подальшого інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{2jAe^{j(2m_2-1)(2\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \left(-\frac{2}{2m_2-1} + \frac{4J_0(za^*)J_{2m_2-1}(z)}{2m_2-1} - \right. \\
&+ 2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \left(\frac{1}{2m_2+2n_1-1} - \frac{1}{2m_2-2n_1-1} \right) + \\
&+ 2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(z) \left(\frac{1}{2m_2+6n_2-1} - \frac{1}{2m_2-6n_2-1} \right) + \\
&+ 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+n_1-3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1+3n_2)-1} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2(m_2+n_1+3n_2)-1} + \frac{1}{2(m_2-n_1-3n_2)-1} \right) + \\
&+ \pi \left(J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n_1-3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z)J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& - \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2-1}(za^*) \Bigg) + \tag{Б.83} \\
& 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z)J_{2n_2}(za^*) \left(\frac{1}{2(m_2+3n_2-n_1)-1} + \frac{1}{2(m_2-3n_2+n_1)-1} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2(m_2+3n_2+n_1)-1} - \frac{1}{2(m_2-3n_2-n_1)-1} \right).
\end{aligned}$$

Однополярна ШІМ-I з двосторонньою модуляцією і передмодуляцією третьою гармонікою

Аналітичний запис спектральної компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ для заданого закону модуляції є таким:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A}{2\pi^2} & \left(\int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))}^{\pi(1+\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 - \right. \\
& \left. - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi(1+\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))}^{\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2 \right). \tag{Б.84}
\end{aligned}$$

Врахувавши, непарність модулюючої функції $y_M(x_2) = -y_M(x_2 + \pi)$, інтервал інтегрування за змінною x_2 можна зменшити до $(0; \pi)$

$$C_{(m_1)(m_2)} = \frac{A(1-(-1)^{m_2})}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))}^{\pi(1+\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))} e^{j(m_1x_1+m_2(x'_2+(x_1-\varphi_f)/P))} dx_1 dx'_2. \tag{Б.85}$$

Відповідно до формули (Б.85) спектральні компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ з парним індексом m_2 мають нульові значення, $C_{(m_1)(2m_2)} = 0$, тому доцільно шукати значення спектральних компонент тільки з непарним значенням за індексом m_2 :

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)} &= \frac{A e^{-j(2m_2-1)\varphi_f/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{\pi(1-\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))}^{\pi(1+\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))} e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)x_1+(2m_2-1)x'_2)} dx_1 dx'_2 = \\
&= \frac{A(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \left(e^{j((m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))+(2m_2-1)x'_2} - \right. \\
&\quad \left. - e^{j(-(m_1+(2m_2-1)/P)\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2)))+(2m_2-1)x'_2} \right) dx'_2 = \frac{2jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \times \\
&\quad \int_0^\pi e^{j(2m_2-1)x'_2} \left(\sin((m_1+(2m_2-1)/P)\pi\mu^*(\sin(x'_2)+a^*\sin(3x'_2))) dx'_2 = \right. \\
&= \frac{2jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\cos((2m_2-1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) + \right. \\
&\quad + \cos((2m_2-1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) + \\
&\quad + j \sin((2m_2-1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) + \\
&\quad \left. + j \sin((2m_2-1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) \right) dx'_2, \tag{Б.86}
\end{aligned}$$

де $z = (m_1 + (2m_2 - 1) / P) \pi \mu^*$.

Оскільки для функцій $\sin(z \sin(x'_2))$ і $\sin(za^* \sin(3x'_2))$ істинні тотожності $\sin(z \sin(x'_2)) = \sin(z \sin(\pi - x'_2))$, $\sin(za^* \sin(3x'_2)) = \sin(za^* \sin(3(\pi - x'_2)))$, інтеграл (Б.86) має ненульові значення лише для двох останніх доданків. Використовуючи розклад функцій $\sin(asin(x))$ і $\cos(asin(x))$ для підстановки у формулу (Б.86), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \sin(z \sin(x'_2)) \cos(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
&\times \left(2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) \right) \left(J_0(za^*) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(za^*) \cos(6n_2x'_2) \right) = \\
&= \left(2J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) \sin((2n_1 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) \times \right. \\
&\times \left(\sin((2n_1 - 1 - 6n_2)x'_2) + \sin((2n_1 - 1 + 6n_2)x'_2) \right) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \tag{Б.87} \\
&= j \left(J_0(za^*) \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) (\cos(2(n_1 - m_2)x'_2) - \cos(2(n_1 + m_2 - 1)x'_2)) + \right. \\
&+ \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) (\cos(2(n_1 - 3n_2 - m_2)) - \cos(2(n_1 - 3n_2 + m_2 - 1)) + \\
&\left. \cos(2(n_1 + 3n_2 - m_2)) - \cos(2(n_1 + 3n_2 + m_2 - 1))) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \cos(z \sin(x'_2)) \sin(za^* \sin(3x'_2)) = j \sin((2m_2 - 1)x'_2) \times \\
& \times \left(J_0(z) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) \cos(2n_1 x'_2) \right) \left(2 \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) \right) = \\
& = \left(2J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) \sin(3(2n_2 - 1)x'_2) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \times \right. \\
& \times \left(\sin((3(2n_2 - 1) - 2n_1)x'_2) + \sin((3(2n_2 - 1) + 2n_1)x'_2) \right) j \sin((2m_2 - 1)x'_2) = \\
& = j \left(J_0(z) \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - m_2 - 1)x'_2) - \cos(2(3n_2 + m_2 - 2)x'_2) + \right. \\
& + \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) (\cos(2(3n_2 - n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \\
& - \cos(2(3n_2 - n_1 + m_2 - 2)x'_2) + \cos(2(3n_2 + n_1 - m_2 - 1)x'_2) - \\
& \left. - \cos(2(3n_2 + n_1 + m_2 - 2)x'_2) \right)). \tag{Б.88}
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (Б.87)-(Б.88) у формулу (Б.86) та її подальшого інтегрування, отримаємо:

$$\begin{aligned}
& C_{(m_1)(2m_2-1)} \frac{4jA(-1)^{m_1} e^{j(2m_2-1)(\pi-\varphi_f)/P}}{\pi} \left(2J_0(za^*) J_{2m_2-1}(z) + \right. \\
& + J_0(z) \left(J_{(2m_2-1)/3}(za^*) - J_{(1-2m_2)/3}(za^*) \right) + \sum_{n_1-3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \\
& - \sum_{n_1-3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{n_1+3n_2=m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) - \\
& - \sum_{n_1+3n_2-1=-m_2}^{\infty} J_{2n_1-1}(z) J_{2n_2}(za^*) + \sum_{3n_2-n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& - \sum_{3n_2-n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) + \sum_{3n_2+n_1-1=m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) - \\
& \left. - \sum_{3n_2+n_1-2=-m_2}^{\infty} J_{2n_1}(z) J_{2n_2-1}(za^*) \right). \tag{Б.89}
\end{aligned}$$

ДОДАТОК В. РОЗРАХУНОК СИЛОВОЇ ЧАСТИНИ БАГАТОКОМІРКОВОГО ЗАРЯДНОГО ПРИСТРОЮ

В.1. Розрахунок параметрів елементів комірки SEPIC перетворювача

Зарядний пристрій розраховується для вхідної напруги $U_{in} = 230 \text{ В} \pm 15\%$, вихідної потужності $P_{out} = 400 \text{ Вт}$ і максимальної частоти комутації $f_{max} = 120 \text{ кГц}$. Вихідна напруга U_{out} змінюється в діапазоні 17.5..30 В. Згідно згаданими вище обмеженнями, максимальне значення коефіцієнта заповнення дорівнює $\gamma_{max} = 0.5$ і дорівнює максимальній вихідній напрузі U_{out_max} .

Задані дані дозволяють розрахувати коефіцієнт трансформації трансформатора n :

$$n = \frac{(U_{out_max} - \Delta U_{add})}{\sqrt{2} \cdot U_{in}} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma}, \quad (\text{B.1})$$

де ΔU_{add} – падіння напруги на вихідному діоді перетворювача.

Мінімальне значення коефіцієнта заповнення відповідає максимальний вхідній напрузі U_{in_max} і мінімальній вихідній U_{out_min} :

$$\gamma_{min} = \frac{(U_{out_min} + \Delta U_{add})}{n \cdot \sqrt{2} \cdot U_{in_max} + (U_{out_min} + \Delta U_{add})}. \quad (\text{B.2})$$

Середнє значення вхідного струму комірку в ГРП I_{d_cell} розраховується за формулою:

$$I_{d_cell} = \frac{P_{out} / 4}{N \cdot k_{\phi} \cdot U_{in} \cdot \eta}, \quad (\text{B.3})$$

де k_{ϕ} – коефіцієнт форми. Для синусоїдальної напруги, $k_{\phi} = 1.11$, η – коефіцієнт корисної дії перетворювача, $\eta = 0.9$.

Максимальне значення струму комірки I_{max_cell} розраховується наступним чином:

$$I_{max_cell} = \pi \cdot I_{d_cell}. \quad (\text{B.4})$$

Значення I_{max_cell} відповідає максимальному значенню струму через вхідний транзистор перетворювача.

Дросель L , що обмежує струм на рівні I_{max_cell} має таку індуктивність:

$$L_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{in} \cdot \gamma T}{I_{\max_cell}}. \quad (B.5)$$

Індуктивність первинної обмотки трансформатора L_{TV} розраховується на основі співвідношення, що забезпечує кращу форму вхідного струму:

$$L_{TF1} = L \frac{U_{out_min}}{n \cdot \sqrt{2} \cdot U_{in_max}}. \quad (B.6)$$

Ємність конденсатора C_1 розраховується для пульсації напруги $\Delta U_{cl} = 15 \text{ В}$ (<5%):

$$C_1 = \frac{I_{\max_cell} \cdot \gamma_{\min}}{\Delta U_{C1} \cdot f_{\min}}. \quad (B.7)$$

Розраховані значення елементів комірки наведено в табл. В.1.

Таблиця В.1. Параметри елементів комірки

Елемент	Значення	Елемент	Значення
L_1	1.644 мГн	TV	$n = 0.1, L_{TV} = 0.75 \text{ мГн}$
VT	1.4 А, 745 В	VD_1	12.5 А, 70 В
C_1	0.25 мкФ, 400 В	C_2	6.8 мФ, 32 В

В.2. Регенеративний снабер на основі зворотноходового перетворювача

Принцип роботи трансформатора перетворювача SEPIC подібний на зворотноходовий трансформатор, одним з недоліків якого є генерування енергії індуктивністю розсіювання трансформатора, для розсіювання якої зазвичай використовують пасивні RCD снабери. Для повторного використання енергії індуктивності розсіювання, її передають на вхід або вихід перетворювача за допомогою пасивних або активних регенеративних снаберів. Для багатокоміркового зарядного пристрою такі рішення є надлишковими, оскільки передбачають збільшення кількості снаберів відповідно до кількості комірок. Тому у перетворювачі використовується один зворотноходовий перетворювач – регенеративний снабер, що передає енергію від усіх індуктивностей розсіювання у вторинне коло для заряджання батарей та живлення системи керування. Спрощена

функціональна схема під'єднання регенеративного снабера до модульного зарядного пристрою показана на рис. В.1.

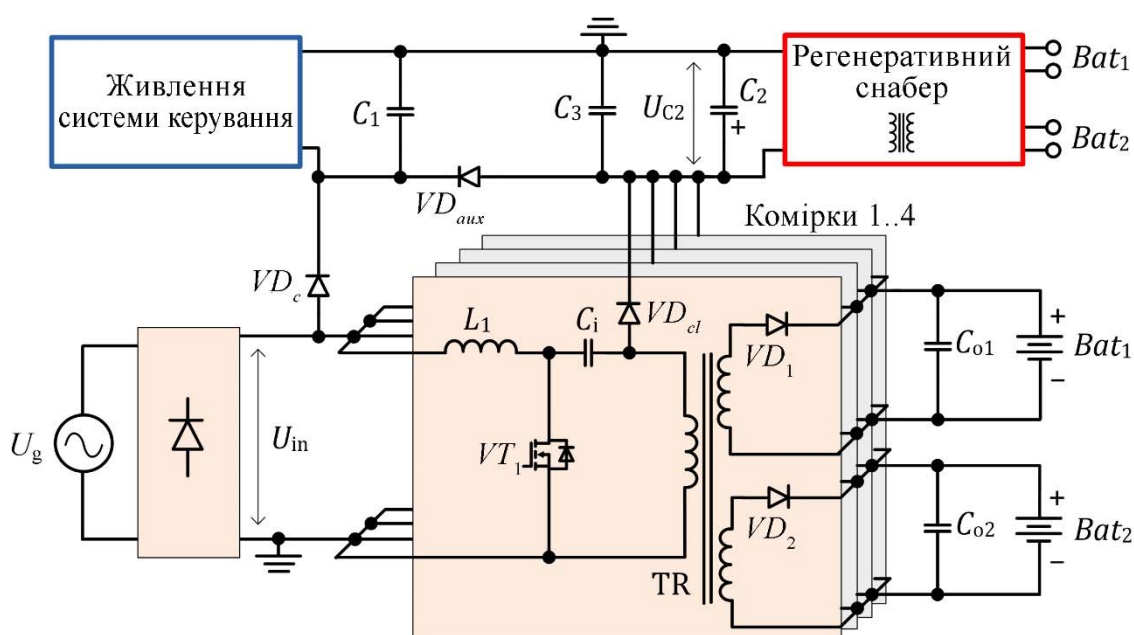


Рис. В.1. Спрощена функціональна схема під'єднання регенеративного снабера до модульного зарядного пристрою

Енергія індуктивності розсіювання кожної комірки відводиться діодом VD_{cl} , розміщеним біля трансформатора, та накопичується на конденсаторах C_2 і C_3 , на виході яких встановлено зворотноходовий перетворювач, який передає енергію навантаженню. Додаткова схема з діодом VD_c живить систему керування від мережі змінного струму, коли зарядний пристрій не працює.

Система керування весь час споживає приблизно однакову потужність близько 1 Вт, тоді як регенеративний снабер працює лише в тому випадку, якщо напруга U_{C2} конденсатора C_2 перевищує мінімальне значення U_{C2_min} , $U_{C2} > U_{C2_min}$. Мінімальна напруга U_{C2_min} повинна перевищувати максимальну вихідну напругу, перераховану до первинної обмотки трансформатора $U_{C2_min} > U_b/n$, щоб уникнути споживання первинної енергії комірки регенеративною системою. Оскільки значення U_b/n не перевищує амплітудного значення напруги мережі $U_b/n \leq U_{in_max}$, умова роботи регенеративного снабера є такою:

$$U_{c2 \text{ min}} > U_{in \text{ max}}. \quad (\text{B.8})$$

Якщо умова (В.8) не виконується, зворотногоходовий перетворювач не працює.

Значення ємності конденсатора C_2 розраховується з умови придушення змінної складової напруги, що не повинна перевищувати значення ΔU_{C2} при потужності P_r і частоті мережі f_g :

$$C_2 = \frac{P_r}{2f_g U_{in_max} \Delta U_{C2}}. \quad (B.9)$$

Конденсатор C_1 заряджається разом з конденсатором C_2 , коли напруга на ньому перевищить максимальне значення напруги мережі U_{in_max} та поріг ΔU_{C2} :

$$U_{c1_max} = U_{in_max} + \Delta U_{C2}. \quad (B.10)$$

Енергія конденсатора C_1 використовується лише для живлення системи керування, при цьому необхідно, щоб напруга на ньому не була меншою максимального значення напруги мережі U_{in_max} :

$$C_1 = \frac{P_{cs}}{2f_{reg} \left[(U_{in_max} + \Delta U_{C2})^2 - U_{in_max}^2 \right]}, \quad (B.11)$$

де P_{cs} – потужність, що споживається системою керування, f_{reg} – частота роботи зворотногоходового перетворювача.

Конденсатор C_3 розташовано біля трансформатора комірки для усунення сплесків напруги зумовлених індуктивністю розсіювання. Ємність цього конденсатора визначається максимально можливою напругою на вхідному транзисторі комірки. Припустимо, що можливе збільшення напруги на транзисторі становить ΔU_{VT} , тоді ємність конденсатора C_3 розраховується за формулою:

$$C_3 = \frac{L_k I_{pr_max}^2}{\left[(U_{b_max} / n + \Delta U_{VT})^2 - U_{out_max}^2 / n^2 \right]}, \quad (B.12)$$

де L_k – індуктивність розсіювання, U_{b_max} – максимальна напруга батареї, I_{pr_max} – амплітудне значення струму первинної обмотки трансформатора.

Інші елементи регенеративного снабера розраховуються за типовими методиками. Схема регенеративної системи на основі типового драйвера зворотногоходового перетворювача сімейства TinySwitch-4 показана на рис. В.2, а спрощені діаграми роботи системи – на рис. В.3.

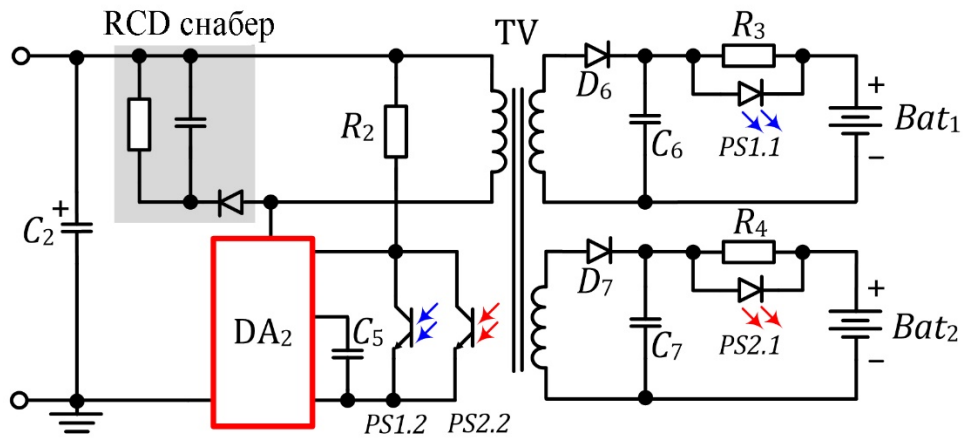


Рис. В.2. Схема регенеративної системи на основі драйвера зворотногоходового перетворювача сімейства TinySwitch-4

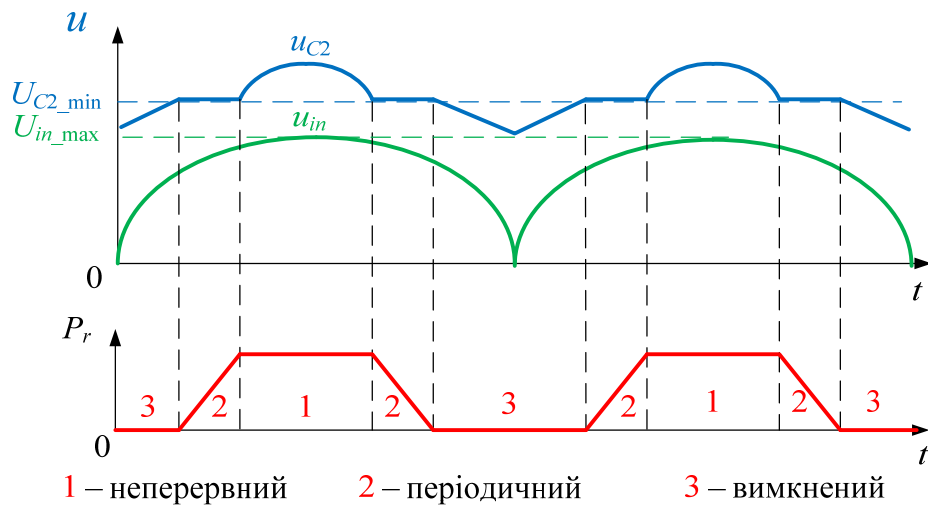


Рис. В.3. Спрощені часові діаграми роботи регенеративної системи

Нижній поріг роботи зворотногоходового перетворювача U_{C2_min} задається резистором, значення $R_2=13$ МОм, що відповідає напрузі $U_{C2_min}=325$ В.

Як показано на рис. В.3 енергія в індуктивності розсіювання здебільшого генерується, коли випрямлена вхідна напруга знаходиться біля максимального значення. У цьому випадку напруга конденсатора C_2 збільшується, що активізує зворотногоходовий перетворювач, який починає працювати з максимальною потужністю (режим 1). Коли напруга на вході досягає проміжного значення, він працює в періодичному режимі (режим 2). Під час низької вхідної напруги вся енергія споживається системою керування, і перетворювач вимикається (режим 3).

Для експериментально виміряного значення індуктивності розсіювання трансформатора $L_k = 20$ мкГн, сумарна потужність індуктивностей розсіювання комірок P_r обчислюється таким чином:

$$P_r = N \frac{L_k I_{pr-\max}^2}{2} f_{\min} = 9 \text{ Вт.} \quad (\text{В.13})$$

За розрахованим значенням вихідної потужності $P_r = 9$ Вт і максимальної вихідної напругою $U_{\max} = 30$ В розраховано параметри елементів та обрано їх тип, що наведені у табл. В.2.

Таблиця В.2. Елементи регенеративної системи

Елемент	Позначення	Значення/тип
Конденсатор	C_1	400 нФ, 750 В
	C_2	7 мкФ, 750 В
	C_3	3 нФ, 750 В
	C_5	100 нФ, 25 В
	C_6, C_7	220 мкФ, 35 В
Резистори регуювання напруги	R_2	13 МОм, 0.25 Вт
Давачі струму	R_3, R_4	6.8 Ом, 1 Вт
Вихідні діоди	D_6, D_7	2 А, 100В, SR2100
Драйвер перетворювача	DA_2	TNY280
Оптопари	PS_1, PS_2	PC817
Трансформатор	TV	POL15020

У результаті вибору елементів та розведення друкованої плати було зібрано експериментальний зразок зарядного пристрою, рис. В.4.

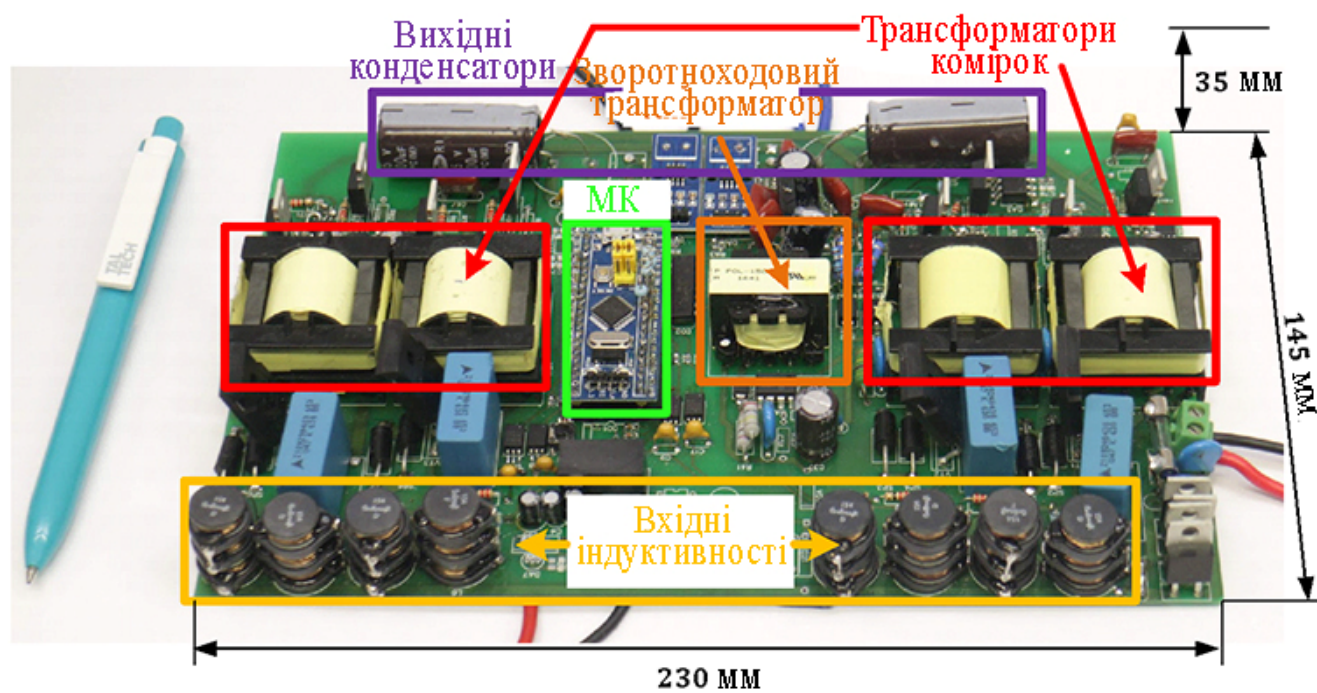


Рис. В.4. Фото експериментального зразка зарядного пристрою

ДОДАТОК Г. ПРОМІЖНІ РОЗРАХУНКИ

Г.1. Розрахунок спектра вільної складової за формулою (3.57)

Враховуючи умову симетричності $u(x_2) = -u(\pi + x_2)$, вираз (3.57) можна записати:

$$\begin{aligned}
 C_{BL(2k-1)} &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} u_0 e^{-x_2/(\omega_M \tau)} e^{-j(2k-1)x_2} dx_2 + \sum_{i=0}^{P/2-1} \int_{x_{2(3i)}}^{\pi} u_{0i} e^{-x_2/(\omega_M \tau)} e^{-j(2k-1)x_2} dx_2 \right) = \\
 &= \frac{1}{-\pi((1/(\omega_M \tau)) + j(2k-1))} \times \\
 &\quad \left(-u_0 e^{-\pi/(\omega_M \tau)} - u_0 + E(-P e^{-\pi/(\omega_M \tau)} / 2 + e^{-\pi/(\omega_M \tau)} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-\Delta x_2 \mu \sin(i \Delta x_2)/(\omega_M \tau)} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-(\Delta x_2/2)(j(2k-1)+1/(\omega_M \tau))} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-(i \Delta x_2 (j(2k-1)+1/(\omega_M \tau)) + (\Delta x_2/2) \mu \sin(i \Delta x_2)(j(2k-1)+1/(\omega_M \tau)))} + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-(\Delta x_2/2)(j(2k-1)+1/(\omega_M \tau))} \sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-(i \Delta x_2 (j(2k-1)+1/(\omega_M \tau)) + (\Delta x_2/2) \mu \sin(i \Delta x_2)(j(2k-1)+3/(\omega_M \tau)))} \right). \tag{Г.1}
 \end{aligned}$$

Для знаходження сум виразу (Г.1) використовуються розклади функцій $\sin(\sin(x_2))$ і $\cos(\sin(x_2))$ на основі формул. Останні дві суми у формулі (Г.1) є однотипними, тому для їх обчислення використано один вираз.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-\Delta x_2 \mu \sin(i \Delta x_2)/(\omega_M \tau)} = \\
 &= P J_0(j \Delta x_2 \mu / (2 \omega_M \tau)) / 2 + j 2 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1}(j \Delta x_2 \mu / (\omega_M \tau)) \operatorname{ctg}((2v-1) \Delta x_2 / 2); \\
 &\sum_{i=0}^{P/2-1} e^{-(i \Delta x_2 (j(2n-1)+1/(\omega_M \tau)) + (\Delta x_2/2) \mu \sin(i \Delta x_2)(j(2k-1)+1/(\omega_M \tau)))} = \\
 &= J_0((\Delta x_2 / 2) \mu (jl / (\omega_M \tau) - (2k-1))) \frac{-e^{-\pi/(\Omega \tau)} - 1}{e^{-\Delta x_2 (j(2k-1)+1/(\omega_M \tau))} - 1} + \\
 &+ 0.5 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v} \left(\left(\frac{\Delta x_2}{2} \right) \mu \frac{jl}{\omega_M \tau} - (2k-1) \right) \left(2 + 2 \cos \left(\frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right) - \sin \left(\frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right) \right) \times
 \end{aligned} \tag{Г.2}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\operatorname{ctg} \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) - 2v \right) \right) + \operatorname{ctg} \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) + 2v \right) \right) \right) + \\
& + j \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v} ((\Delta x_2 / 2) \mu(jl / (\omega_M \tau) - (2k-1))) \times \\
& \times \left(\frac{\cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) - 2v \right) \right) + \cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) - 2v \right) - \frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right)}{2 \sin \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) - 2v \right) \right)} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) + 2v \right) \right) - \cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) + 2v \right) - \frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right)}{\sin \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - (2k-1) + 2v \right) \right)} \right) + \\
& + j \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1} ((\Delta x_2 / 2) \mu(jl / (\omega_M \tau) - (2k-1))) \times \\
& \times \left(\frac{\cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(-\frac{j}{\omega_M \tau} + 2(k+v-1) \right) \right) - \cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(-\frac{j}{\omega_M \tau} + 2(k+v-1) \right) + \frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right)}{2 \sin \left(0.5 \Delta x_2 \left(-\frac{j}{\omega_M \tau} - 2(k+v-1) \right) \right)} + \right. \\
& \left. - \frac{\cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} + 2(v-k) \right) \right) - \cos \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} + 2(v-k) \right) - \frac{\pi j}{\omega_M \tau} \right)}{2 \sin \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} + 2(v-k) \right) \right)} \right) - \\
& - 0.5 \sum_{v=1}^{\infty} J_{2v-1} ((\Delta x_2 / 2) \mu(jl / (\omega_M \tau) - (2k-1))) \times \\
& \times \left(\sin \left(\frac{\pi j}{\Omega \tau} \right) \left(\operatorname{ctg} \left(0.5 \Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - 2(k+v-1) \right) \right) - \operatorname{ctg} \left(\Delta x_2 \left(\frac{j}{\omega_M \tau} - 2(k-v) \right) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Г.2. Розрахунок параметрів $G_{(m1)(0)}$, $G_{(m1)(1)}$, $G_{(m1)(z1)(0)}$, $G_{(m1)(z1)(1)}$, формули (4.14)-(4.17)

У сумі G_{m1} зробимо заміну $2l-1=2k-1-m_1P$.

$$G_{m_1} = \frac{1}{m_1^2} \sum_{l=2-m_1P}^{\infty} \frac{J_{2l-1}^2(\pi \mu m_1)}{(2l-1+m_1P)^2}. \quad (\Gamma.3)$$

Коли модуль аргументу функції Бесселя перевищує її аргумент, її значення прямує до нуля [120]:

$$J_l(z) \rightarrow 0, |l| + 1 > z. \quad (\Gamma.4)$$

Нижня межа сумування ряду (Г.3) починається зі значення $l = 2 - m_1 P$, враховуючи умову $P \gg \pi\mu$, можна зробити висновок, що значення всіх членів ряду, починаючи від мінус нескінченності до $l = 2 - mP$ прямують до нуля і їх, для спрощення подальших розрахунків, можна включити до суми (Г.4):

$$G_{m_1} \cong \frac{1}{m_1^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2l-1}^2(\pi\mu m_1)}{(2l-1+m_1 P)^2}. \quad (\Gamma.5)$$

Для функцій Бесселя виконується рівність:

$$J_{2l-1}(z) = -J_{-(2l-1)}(z) \Rightarrow J_{2l-1}^2(z) = J_{-(2l-1)}^2(z),$$

з урахуванням цього ряд (Г.5) можна записати як:

$$G_{m_1} = \frac{1}{m_1^4 P^2} \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-1}^2(m_1 \pi\mu) \left(\frac{1}{(1+(2l-1)/m_1 P)^2} + \frac{1}{(1-(2l-1)/m_1 P)^2} \right). \quad (\Gamma.6)$$

Використаємо розклад функцій [167]:

$$(1+z)^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i z^i; (1-z)^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i, \quad (\Gamma.7)$$

і підставимо у формулу (Г.6)

$$\begin{aligned} G_{m_1} &= \frac{1}{m_1^4 P^2} \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-1}^2(m_1 \pi\mu) \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{2l-1}{m_1 P} \right)^i \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2l-1}{m_1 P} \right)^i \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{m_1^4 P^2} \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-1}^2(m_1 \pi\mu) \left(2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} 2i \left(\frac{2l-1}{m_1 P} \right)^{2i} \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.8)$$

Знайдемо суму складових ряду (Г.8). Сума

$$G_{m1(0)} = \frac{2}{m_1^4 P^2} \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-1}^2(m_1 \pi\mu),$$

розрахована в [120]:

$$G_{m1(0)} = \frac{(1 - J_0(2m_1\pi\mu))}{2m_1^4 P^2}. \quad (\Gamma.9)$$

Розглянемо суму

$$G_{m1(1)} = \frac{4}{m_1^4 P^2} \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{2l-1}{m_1 P} \right)^2 J_{2l-1}^2(m_1\pi\mu) = \frac{4}{m_1^6 P^4} \sum_{l=1}^{+\infty} (2l-1)^2 J_{2l-1}^2(m_1\pi\mu). \quad (\Gamma.10)$$

Для розрахунку суми ряду (Г.10) використаємо тотожність [120]:

$$lJ_l(z) = 0.5l(J_{l-1}(z) + J_{l+1}(z)). \quad (\Gamma.10)$$

Застосувавши тотожність (Г.10) до формули (Г.9), отримаємо:

$$\begin{aligned} G_{m1(1)} &= \frac{1}{m_1^4 P^4} \sum_{l=1}^{+\infty} (\pi\mu)^2 (J_{2l-2}(m_1\pi\mu) + J_{2l}(m_1\pi\mu))^2 = \\ &= \frac{(\pi\mu)^2}{m_1^4 P^4} \left(J_0^2(m_1\pi\mu) + 2 \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l}^2(m_1\pi\mu) + 2 \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-2}(m_1\pi\mu) J_{2l}(m_1\pi\mu) \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

Сума

$$J_0^2(m_1\pi\mu) + 2 \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l}^2(m_1\pi\mu) = 1 + J_0(2m_1\pi\mu),$$

є табличною. Розрахуємо суму

$$2 \sum_{l=1}^{+\infty} J_{2l-2}(m_1\pi\mu) J_{2l}(m_1\pi\mu) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{2l-2}(m_1\pi\mu) J_{2l}(m_1\pi\mu). \quad (\Gamma.12)$$

Для функцій Бесселя з парним порядком виконується рівність

$$J_{2l-k}(z) = J_{k-2l}(z). \quad (\Gamma.13)$$

Використавши теорему сумування [120] до ряду (Г.12) та властивість функцій Бесселя з парним порядком (Г.13), отримаємо:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{2-2l}(m_1\pi\mu) J_{2l}(m_1\pi\mu) = J_2(2m_1\pi\mu) / 2. \quad (\Gamma.14)$$

Отже,

$$G_{m1(1)} = \frac{(\pi\mu)^2 (1 + J_0(2m_1\pi\mu) + J_2(2m_1\pi\mu))}{(m_1 P)^4}. \quad (\Gamma.15)$$

Порівнюючи значення сум $G_{m1(0)}$ і $G_{m1(1)}$, можна зробити висновок, що $G_{m1(0)} / G_{m1(1)} \sim P^2$, аналогічно $G_{m1(0)} / G_{m1(2)} \sim P^4$ і т.д. Навіть для мінімальних значень кратності модуляції $P = 10$, значення суми $G_{m1(0)}$ на два порядки більше $G_{m1(1)}$ і на чотири - $G_{m1(2)}$. Тому при практичних розрахунках сумами, $G_{m1(2)} \dots G_{m1(k)}$ можна знехтувати, а складову $G_{m1(1)}$ враховувати наближено.

Розглянемо ряд з складовою $G_{(m1)(z1)}$

$$G_{(m1)(z1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_{(m1)(z1)}}{(2k-1)^2} = \frac{2(-1)^{m1+z1}}{m1z1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_{2k-1-m1P}(\pi\mu m1) J_{2k-1-z1P}(\pi\mu z1)}{(2k-1)^2}. \quad (\Gamma.16)$$

Введемо заміну $2l-1=2k-1-m1P$:

$$G_{(m1)(z1)} = \frac{2(-1)^{m1+z1}}{m1z1} \sum_{l=2-m1P}^{\infty} \frac{J_{2l-1}(\pi\mu m1) J_{2l-1-(z1-m1)P}(\pi\mu z1)}{(2l-1+m1P)^2}. \quad (\Gamma.17)$$

Відповідно до умови (4.15) можна записати:

$$G_{(m1)(z1)} = \frac{2(-1)^{m1+z1}}{m1z1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2l-1}(\pi\mu m1) J_{2l-1-(z1-m1)P}(\pi\mu z1)}{(2l-1+m1P)^2}. \quad (\Gamma.18)$$

Для розрахунку ряду (Г.18) використаємо розклад функцій (Г.7)

$$G_{(m1)(z1)} = \frac{2(-1)^{m1+z1}}{z1m1^3P^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{2l-1}(\pi\mu m1) J_{2l-1-(z1-m1)P}(\pi\mu z1) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{2l-1}{m1P} \right)^i \right)^2. \quad (\Gamma.19)$$

Знайдемо суму окремих складових ряду (Г.19):

$$G_{(m1)(z1)(0)} = \frac{2(-1)^{m1+z1}}{z1m1^3P^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{2l-1}(\pi\mu m1) J_{2l-1-(z1-m1)P}(\pi\mu z1). \quad (\Gamma.20)$$

Для розрахунку суми (Г.20) використаємо теорему сумування:

$$J_l(z1+z2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(z1) J_{l-i}(z2), \quad (\Gamma.21)$$

і для різниці аргументів $z1$ і $z2$:

$$J_l(z1-z2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(z1) J_{l-i}(-z2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^{l-i} J_i(z1) J_{l-i}(z2). \quad (\Gamma.22)$$

Віднявши вираз (Г.22) від виразу (Г.21), отримаємо:

$$J_l(z_1 + z_2) - J_l(z_1 - z_2) = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_{2i-1}(z_1) J_{l-(2i-1)}(z_2). \quad (\text{Г.23})$$

Застосувавши вираз (Г.23) до суми формули (Г.20), отримаємо:

$$G_{(m_1)(z_1)(0)} = \frac{(-1)^{m_1+z_1+1}}{z_1 m_1^3 P^2} \times \left(J_{(z_1-m_1)P}(\pi\mu(z_1 + m_1)) - J_{(z_1-m_1)P}(\pi\mu(z_1 - m_1)) \right). \quad (\text{Г.24})$$

Знайдемо суму ряду $G_{(m_1)(z_1)(1)}$

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{4(-1)^{m_1+z_1+1}}{z_1 m_1^4 P^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (2l-1) J_{2l-1}(\pi\mu m_1) J_{2l-1-(z_1-m_1)P}(\pi\mu z_1). \quad (\text{Г.25})$$

Після використання формули (Г.10) до формули (Г.25), отримаємо:

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{2(-1)^{m_1+z_1}}{z_1 m_1^3 P^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (J_{2l-2}(\pi\mu m_1) + J_{2l}(\pi\mu m_1)) J_{(z_1-m_1)P-(2l-1)}(\pi\mu z_1). \quad (\text{Г.26})$$

Використавши теорему додавання до виразу (Г.26), матимемо:

$$G_{(m_1)(z_1)(1)} = \frac{(-1)^{m_1+z_1}}{z_1 m_1^3 P^3} (J_{(z_1-m_1)P+1}(\pi\mu(z_1 + m_1)) + J_{(z_1-m_1)P+1}(\pi\mu(z_1 - m_1)) + J_{(z_1-m_1)P-1}(\pi\mu(z_1 + m_1)) + J_{(z_1-m_1)P-1}(\pi\mu(z_1 - m_1))). \quad (\text{Г.27})$$

Г.3. Виведення формул аналітичних виразів спектральних компонент однополярної ЧІМ $C_{(m_1)(m_2)}^+$

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)}^+ = & \frac{A}{2\pi^2} \left(\int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi)-y)+m_1P(\arccos(1-2x_2/\pi)-x_2))} \times \right. \\
& \times \int_{\pi-2\mu}^{\pi+2\mu} e^{j(m_1x_1+m_2x_2)} dx_1 dx_2 - \\
& - \int_\pi^{2\pi} e^{j(m_2(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)+\pi-x_2)+m_1P(\arccos(1-2(x_2-\pi)/\pi)+\pi-x_2))} \times \\
& \times \int_{\pi-2\mu}^{\pi+2\mu} e^{j(m_1x_1+nx_2)} dx dx_2 \left. \right) = \frac{A(-1)^{m_1} \sin(m_1 2\mu)}{m_1 \pi^2} (1 - (-1)^{m_2}) \times \\
& \times \int_0^\pi e^{j(m_2(\arccos(1-2x_2/\pi))+m_1P(\arccos(1-2x_2/\pi)-y))} dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{Г.28}$$

Для парних m_2 , $m_2 = 2k$ спектральні гармоніки $C_{(m_1)(m_2)}^+$ дорівнюють нулю, $C_{(m_1)(2m_2)}^+ = 0$, а для непарних розраховуються за формулою:

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(2m_2-1)}^+ = & \frac{2A(-1)^{m_1} \sin(m_1 2\mu)}{m_1 \pi^2} \times \\
& \times \int_0^\pi e^{j((2m_2-1)(\arccos(1-2x_2/\pi))+m_1P(\arccos(1-2x_2/\pi)-y))} dx_2 = \\
& = \frac{2A(-1)^{m_1} \sin(m_1 2\mu)}{m_1 \pi^2} \left(\int_0^\pi T_{2m_2-1+m_1P} \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right) e^{-jm_1Px_2} dx_2 + \right. \\
& \left. + j \int_0^\pi \sqrt{1 - T_{2m_2-1+m_1P}^2 \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right)} e^{-jm_1Px_2} dx_2 \right),
\end{aligned} \tag{Г.29}$$

де T_n – поліном Чебишева першого роду порядку n [186, 187].

Для усунення невизначеності $0/0$ у формулі (Г.29) при $m_1 = 0$, значення спектральної компоненти $C_{0(2m_2-1)}^+$ для цього випадку розраховується окремо:

$$C_{0(2m_2-1)}^+ = \frac{4H\mu}{\pi^2} \left(\int_0^\pi T_{2m_2-1} \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right) dx_2 + j \int_0^\pi \sqrt{1 - T_{2m_2-1}^2 \left(1 - \frac{2x_2}{\pi} \right)} dx_2 \right).$$

Г.4. Аналітичний вираз спектральних компоненти $C_{(m_1)(m_2)}$ напруги на вході трансформатора зі зворотним зв'язком

$$\begin{aligned}
C_{(m_1)(m_2)} = & \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{-(2\theta-\delta)}^{\delta} u_g(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) - \right. \\
& - \int_{\pi-(2\theta-\delta)}^{\pi+\delta} u_g(x_2) e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) + \\
& \int_{\delta}^{\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2 \delta} e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) - \\
& \left. \int_{\pi+\delta}^{2\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2 \delta} e^{jm_2 x_2} dx_2 \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 - \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)} e^{jm_1 x_1} dx_1 \right) \right). \quad (Г.30)
\end{aligned}$$

Завдяки симетрії підінтегральних виразів за змінними x_1 і x_2 , вираз (Г.30) спрощується до виду:

$$\begin{aligned}
C_{(2m_1-1)(2m_2)} = & \frac{2}{\pi^2} \left(\int_{-(2\theta-\delta)}^{\delta} u_g(x_2) e^{j2m_2 x_2} dx_2 \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(x_2)}{U_{in_nom}} \right)} e^{j(2m_1-1)x_1} dx_1 + \right. \\
& \int_{\delta}^{\pi-(2\theta-\delta)} u_g(\delta) e^{-x_2 \delta} e^{j2m_2 x_2} dx_2 \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \gamma_{nom} \left(2 \frac{u_g(\delta) e^{-x_2 \delta}}{U_{in_nom}} \right)} e^{j(2m_1-1)x_1} dx_1 \left. \right). \quad (Г.31)
\end{aligned}$$

Г.5. Послідовність аналітичних перетворень виразів параметрів B і THD_{lf} (5.85) і (5.86)

Оскільки складові ряду у формулах (5.85) і (5.86) швидко спадають до нуля зі зростанням параметра m_3 , можна вважати, що сумування проводиться до нескінченності, $M = \infty$. Після підстановки у формули (5.85) і (5.86) номерів інтергармоніки $2k_i - 1$ з формул (5.83) і (5.84), отримаємо:

$$THD_{lf} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(V+m_3P_3^+)/ (3V)} + e^{-j2\pi(V+m_3P_3^+)/ (3V)} \right) \right)^2} + \quad (Г.32)$$

$$+ \sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(-V+m_3P_3^+)/ (3V)} + e^{-j2\pi(-V+m_3P_3^+)/ (3V)} \right) \right)^2;$$

$$B = V \sqrt{\sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(V + m_3P_3^+)^2 (36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(V+m_3P_3^+)/ (3V)} + e^{-j2\pi(V+m_3P_3^+)/ (3V)} \right) \right)^2} + \quad (Г.33)$$

$$+ \sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(-V + m_3P_3^+)^2 (36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(e^{j2\pi(-V+m_3P_3^+)/ (3V)} + e^{-j2\pi(-V+m_3P_3^+)/ (3V)} \right) \right)^2.$$

Ряд тригонометричних перетворень на основі формули Ейлера дозволяє спростити вирази (Г.32) і (Г.33) до виду:

$$THD_{lf} = \frac{2}{\sqrt{3}\mu} \sqrt{\sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} \left(1 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi(m_3P_3^+)}{3V} \right) \right)}; \quad (Г.34)$$

$$B = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(V + m_3P_3^+)^2 (36m_3^2 - 1)^2} \left(1 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi m_3P_3^+}{3V} \right) \right)} + \quad (Г.35)$$

$$+ \sum_{m_3=1}^{\infty} \frac{1}{(-V + m_3P_3^+)^2 (36m_3^2 - 1)^2} \left(1 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi m_3P_3^+}{3V} \right) \right)$$

Для отримання згорнутих формул для сум у формулах (Г.34) і (Г.35), використаємо розклад у ряд Тейлора дробу [167]:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} l x^{l-1}, -1 < x < 1, \quad (Г.36)$$

і застосуємо її до виразів:

$$\frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} = \frac{1}{36^2 m_3^4} \frac{1}{(1 - 1/(36m_3^2))^2} \approx \frac{1}{36^2 m_3^4} + \frac{2}{36^4 m_3^6}; \quad (Г.37)$$

$$\frac{1}{(V + m_3P_3^+)^2} \approx \frac{1}{(m_3P_3^+)^2} - \frac{2V}{(m_3P_3^+)^3} + \frac{3V^2}{(m_3P_3^+)^4} - \frac{4V^3}{(m_3P_3^+)^5}. \quad (Г.38)$$

$$\frac{1}{(-V + m_3P_3^+)^2} \approx \frac{1}{(m_3P_3^+)^2} + \frac{2V}{(m_3P_3^+)^3} + \frac{3V^2}{(m_3P_3^+)^4} + \frac{4V^3}{(m_3P_3^+)^5}. \quad (Г.39)$$

Після сумування виразів (Г.38) і (Г.39), отримаємо:

$$\frac{1}{(V + m_3 P_3^+)^2} + \frac{1}{(-V + m_3 P_3^+)^2} \approx \frac{1}{(m_3 P_3^+)^2} + \frac{3V^2}{(m_3 P_3^+)^4}. \quad (\text{Г.40})$$

Вираз (Г.37) дозволяє наблизити дріб з похибкою, менше 1 %, вираз (Г.40) – 6 %. Після підстановки виразу (Г.37) до формули (Г.34) та розрахунку сум із врахуванням істотних членів, отримаємо:

$$THD_{lf} = \frac{1}{18\sqrt{3}\mu} \sqrt{\frac{\pi^4}{180} + \frac{\pi^6}{36^2 \cdot 945} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4}{3} \left(-(\varphi - \lfloor \varphi \rfloor)^4 + 2(\varphi - \lfloor \varphi \rfloor)^3 - (\varphi - \lfloor \varphi \rfloor)^2 \right) + \frac{2}{36^2} \cos(2\pi\varphi) \right)}, \quad (\text{Г.41})$$

де $\varphi = P_3^+/(3V)$, $\lfloor \cdot \rfloor$ – функція цілої частини числа з дробу.

Для наближеного обчислення суми ряду (Г.35), спочатку перемножимо вирази (Г.37) і (Г.40) між собою:

$$\frac{1}{(36m_3^2 - 1)^2} \left(\frac{1}{(V + m_3 P_3^+)^2} + \frac{1}{(-V + m_3 P_3^+)^2} \right) \approx \frac{1}{36^2 P_3^{+2}} \left(\frac{1}{m_3^6} + \frac{1}{m_3^8} \left(\frac{3V^2}{P_3^{+2}} + \frac{1}{36^2} \right) + \frac{3V^2}{36^2 m_3^{10} P_3^{+2}} \right). \quad (\text{Г.42})$$

Підставивши вираз (Г.42) у формулу (Г.35) і взявши суму, отримаємо:

$$B = \frac{\sqrt{2}V}{36\sqrt{3}P_3^+} \sqrt{\frac{\pi^6}{945} + \left(\frac{3V^2}{P_3^{+2}} + \frac{1}{36^2} \right) \frac{\pi^8}{9450} + \frac{3V^2}{36^2 P_3^{+2}} \frac{\pi^{10}}{93555} - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi P_3^+}{3V}\right) \left(1 + \left(\frac{3V^2}{P_3^{+2}} + \frac{1}{36^2} \right) + \frac{3V^2}{36^2 P_3^{+2}} - \frac{4V^3}{36^2 P_3^{+3}} \right)}. \quad (\text{Г.43})$$

Проаналізуємо за яких умов, параметри B і THD_{lf} мають мінімальні і максимальні значення. Спочатку проаналізуємо граничні значення параметра THD_{lf} , який є функцією параметрів φ і μ . Залежність параметра THD_{lf} від μ є очевидною і не потребує аналізу – зі зменшенням параметра μ значення THD_{lf} зростає гіперболічно.

При аналізі впливу параметра φ , зауважимо, що у формулі використовується лише дробова частина від параметра φ , (операція $\varphi - \lfloor \varphi \rfloor$), і функція $\cos(2\pi\varphi)$, період

якої дорівнює $\varphi = 1$, то можна вважати, що параметр φ лежить в межах $\varphi \in [0;1)$. У цьому випадку формула для розрахунку THD_{lf} (Г.39) спроститься до виду:

$$THD_{lf} = \frac{1}{18\sqrt{3}\mu} \sqrt{\frac{\pi^4}{180} + \frac{\pi^6}{36^2 \cdot 945} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4}{3} (-\varphi^{*4} + 2\varphi^{*3} - \varphi^{*2}) + \frac{2}{36^2} \cos(2\pi\varphi^*) \right)}, \quad (Г.44)$$

де $\varphi^* = \varphi - \lfloor \varphi \rfloor$, $\varphi^* \in [0;1)$

Для знаходження точок екстремумів, знайдемо похідну від підкореневого виразу і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\pi^4}{3} (-2\varphi^{*2} + 6\varphi^{*2} - 4\varphi^{*3}) - \frac{\pi}{324} \sin(2\pi\varphi^*) = 0. \quad (Г.45)$$

Коренями рівняння (5.73) є $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = 0.5$, $\varphi_3^* = 1$. Оскільки φ^* - дробова частина від φ , то корені $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_3^* = 1$ відповідають будь-якому цілому числу, $\varphi \in N$. Підставляючи ці корені у формулу (Г.44), отримаємо мінімальне значення THD_{lf} :

$$THD_{lf} = \frac{0.0236}{\mu}, \quad (Г.46)$$

тоді як максимальне знаходиться при $\varphi_2^* = 0.5$:

$$THD_{lf} = \frac{0.0688}{\mu}. \quad (Г.47)$$

Оскільки $\varphi^* = \lfloor P_3^+ / 3V \rfloor = \lfloor P_3 / 3 \rfloor$, значення $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_3^* = 1$ з мінімальним THD_{lf} відповідає умові, що параметр кратності модуляції P_3 є кратним числу 3, $P_3 = 3k$, $k \in N$, тобто коли інтергармонік не виникає. Значення $\varphi_2^* = 0.5$ з максимальним THD_{lf} відповідає випадку $P_3 = 1.5 + 3k$, тобто у режимах з інтергармоніками.

Проаналізуємо діапазон значень параметра Γ . Для цього у виразі (Г.43) введемо позначення $P_3^+ / V = P_3$, після чого вираз (Г.43) перетвориться до виду:

$$B = \frac{2}{36\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{P_3^2} \left(\frac{\pi^6}{945} + \left(\frac{3}{P_3^2} + \frac{1}{36^2} \right) \frac{\pi^8}{9450} + \frac{3}{36^2} \frac{\pi^{10}}{93555P_3^2} - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{3} P_3\right) \left(1 + \left(\frac{1}{3P_3^2} + \frac{1}{36^2} \right) + \frac{3}{36^2 P_3^2} \right) \right)}. \quad (Г.48)$$

ДОДАТОК Д. ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ



RĪGAS TEHNISKĀ
UNIVERSITĀTE

Riga Technical University, Reg. Nr. 90000068977, Kaļķu str. 1, Riga, LV-1658, Latvia
Phone 67089999, Fax 67089710, e-mail: rtu@rtu.lv, www.rtu.lv

Акт внедрения

результатов диссертационной работы Вербицкого Евгения Владимировича, посвящённой спектральному анализу процессов в преобразователях электрической энергии в базисе ряда Фурье нескольких переменных

Данным актом подтверждается, что метод спектрального анализа процессов в полупроводниковых преобразователях в базисе ряда Фурье нескольких переменных, разработанный доцентом Вербицким Е.В., был использован при проектировании экспериментального образца модульного зарядного устройства в рамках проекта «Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People ERDF LV 1.1.1.1/16/A/147».

Использование предложенного метода позволило улучшить технические показатели зарядного устройства: коэффициент мощности до 99 % и коэффициент полезного действия до 93 %, что значительно превышает показатели существующих аналогов.

Руководитель проекта,
Д.т.н., Проф., Галкин. И.А.



Certificate of Implementation

of the results of the doctoral thesis prepared by Mr. Ievgen Verbitskyi and devoted to the spectral analysis of energy transformation in power electronic converters on the basis of Fourier series of several variables

Hereby I confirm that the method of spectral analysis of energy transformation in power electronic converters on the basis of Fourier series of several variables, developed by I. V. Verbitsky, has been applied to develop an experimental model of a modular charger within the framework of the project "Research and Development of Electrical, Information and Material Technologies for Low Speed Rehabilitation Vehicles for Disabled People ERDF LV 1.1.1.1/16/A/147".

The use of the proposed method made it possible to improve the technical performance and parameters of the charger for the rehabilitation vehicles: the power factor up to 99% and the energy efficiency up to 93%, which significantly exceeds the performance of existing analogues.

Principal Investigator of the Project
Dr. Sc. Ing., Prof., Galkin I. A.

Акт внедрения

результатов диссертационной работы

Вербицкого Евгения Владимировича

«Спектральный анализ процессов и синтез законов управления полупроводниковыми преобразователями в базисе ряда Фурье нескольких переменных»

Данным актом подтверждается, что методы расчета спектра в полупроводниковых преобразователях на основе ряда Фурье нескольких переменных нашли применение в лаборатории группы силовой электроники Таллинского Технического Университета при анализе спектра сетевого тока полупроводниковых преобразователей с коррекцией коэффициента мощности.

Использование предложенных методов позволило учитывать интергармоники при расчете интегральных показателей качества электроэнергии.

Подпись отв. лица



Certificate of implementation

of the dissertation thesis of

Verbytskyi Ievgen Volodymyrovych

"Spectral analysis of processes and synthesis of control laws for semiconductor converters in the basis of the Fourier series of several variables"

This certificate confirms that the methods for calculating the spectrum in semiconductor converters based on the Fourier series of several variables have found application in the power electronic group laboratory of Tallinn University of Technology for analyzing the spectrum of the power grid current of semiconductor converters with power factor correction.

The implementation of the proposed methods made it possible to take into account interharmonics when calculating the integral parameters of power quality.

Signature



ТОВ «ПЛОДООВОЧ»

Юридична адреса: 08132, м.Вишневе, вул.Київська, 6-В

Фактична адреса: 08132, м.Вишневе, вул.Київська, 6-

р/р ОА903209840000026006210250835 у АТ «ПроКредит Банк» м.Києва

МФО 320984, ЄДРПОУ 38098587

Тел / факс: 536-93-41

Вих. № 01/88

від « 23 » жовтня 2020 р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор ТОВ «Плодоовоч»

Криницький О.В.

АКТ

впровадження результатів дисертаційної роботи

Вербицького Євгена Володимировича

Даним актом підтверджується про те, що результати дисертаційної роботи доцента кафедри електронних пристроїв та систем Вербицького Євгена Володимировича за темою «Спектральний аналіз процесів та синтез законів керування напівпровідниковими перетворювачами у базисі ряду Фур'є декількох змінних» було використано для аналізу характеру електроенергії, що споживається підприємством. У результаті використання методів, запропонованих в дисертаційній роботі, було виявлено ряд інтергармонік та проаналізовано причини їх виникнення. Внаслідок налаштування режимів роботи обладнання та коригування параметрів мережевих фільтрів, вдалося придушити виявлені інтергармоніки, внаслідок чого суттєво підвищився коефіцієнт потужності споживаної енергії та було забезпечено всі вимоги стандарту якості електроенергії.

Головний інженер ТОВ «Плодоовоч»

Вовкогон В.О.



Громадська організація «Асоціація науковців України»

03113, Україна, м. Київ, пер. Артилерійський 7а, тел. (044) 466-55-58

Громадська організація
«Асоціація науковців України»
код ЄДРПОУ 42392288
03194, м. Київ,
вул. Зодчих, буд. 34-а, оф. 1
вих. № 23/20
від «23» *травня* 2022 р.

АКТ

використання результатів дисертаційної роботи
доцента кафедри електронних пристроїв та систем
Вербицького Євгена Володимировича, присвяченої аналізу спектру
електроенергії змінного струму на основі ряду Фур'є декількох змінних

У дисертаційній роботі доцента кафедри електронних пристроїв та систем
Вербицького Є.В. запропоновано ряд оригінальних методів та методик аналізу
параметрів якості електроенергії змінного струму, що дозволяють суттєво
підвищити точність розрахунку спектра напруги і струму мережі, що містять
інтергармоніки.

Асоціацією науковців України використано матеріали дисертаційної
роботи для створення методик і рекомендацій щодо покращення параметрів
якості та ощадливого використання електроенергії з метою популяризації серед
промислових підприємств.

Голова

громадської організації



Дацій О.І.

ЗАТВЕРДЖУЮ
Декан факультету електроніки
КПІ ім. Ігоря Сікорського
д.т.н., проф.


«23» _____ 2020 р.
Валерій ЖУЙКОВ
Факультет електроніки


АКТ

впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи
доцента кафедри електронних пристроїв та систем
Вербицького Євгена Володимировича за темою «Спектральний аналіз процесів
та синтез законів керування напівпровідниковими перетворювачами у базисі
ряду Фур'є декількох змінних»

Комісія у складі завідувача кафедри електронних пристроїв та систем
проф., д.т.н. Юлії ЯМНЕНКО, заступника зав. кафедри з наукової роботи доц.,
к.т.н. Олександра БОНДАРЕНКА та доц., к.т.н. Дмитра МИКОЛАЙЦЯ склала
цей акт про використання результатів дисертаційної роботи Євгена
ВЕРБИЦЬКОГО у навчальному процесі кафедри електронних пристроїв та
систем КПІ ім. Ігоря Сікорського.

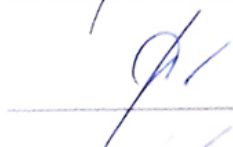
Розроблений дисертантом метод розрахунку спектра на основі
узагальненого ряду Фур'є декількох змінних, методики оцінки інтегральних
параметрів якості електроенергії та розрахунку інтергармонік
використовуються при проведенні лекційних та лабораторних занять з
дисциплін «Теорія інформації та обробки сигналів», «Пристрої
перетворювальної техніки», «Системи електроживлення електронної
апаратури».

Голова комісії

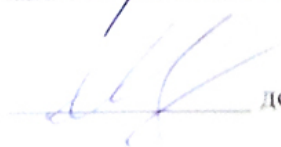


проф., д.т.н. Юлія ЯМНЕНКО

Члени комісії



доц., к.т.н. Олександр БОНДАРЕНКО



доц., к.т.н. Дмитро МИКОЛАСЦЬ